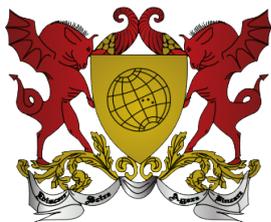


**CURSO TÉCNICO
EM ADMINISTRAÇÃO**

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Ricardo Freitas Martins da Costa



Universidade Federal De Viçosa
Reitor: Demetrius David da Silva

Vice-Reitora: Rejane Nascentes

Coordenadoria de Educação
Aberta e a Distância

Diretor: Francisco de Assis Carvalho Pinto

Organizadores:

Layout:

Antônio dos Santos

Editoração Eletrônica:

Beatriz Fonseca



Esta obra está licenciada com uma Licença
[Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Sumário

1. Introdução à Matemática Financeira.....	5
1. <i>Do que trata a matemática financeira?</i>	5
2. <i>Conceitos básicos</i>	5
3. <i>Resumindo</i>	8
2. Regime de capitalização.....	9
1. <i>Regras básicas</i>	9
2. <i>Regime de capitalização simples</i>	9
3. <i>Regime de capitalização composto</i>	10
4. <i>Resumindo</i>	11
3. Juros simples.....	14
1. <i>Montantes de juros simples</i>	16
2. <i>Taxas proporcionais e equivalentes em juros simples</i>	17
4. Juros compostos.....	20
1. <i>Taxas proporcionais e equivalentes em juros compostos</i>	24
2. <i>Resumindo</i>	25
5. Desconto simples.....	26
1. <i>Desconto comercial (bancário ou “por fora”)</i>	29
6. Rendas certas ou anuidades – Cálculo de prestações... 	32
1. <i>Classificação das séries de pagamentos (rendas)</i>	32
2. <i>Classificação das rendas certas quanto ao pagamento da primeira prestação</i>	32
7. Empréstimos – sistemas de amortização.....	38
1. <i>Sistemas de amortização</i>	39
2. <i>Planos de amortização</i>	40
3. <i>Resumindo</i>	44
4. <i>Problemas complementares</i>	49
5. <i>Respostas dos problemas complementares</i>	57

Significado dos ícones da apostila

Para facilitar o seu estudo e a compreensão imediata do conteúdo apresentado, ao longo de todas as apostilas, você vai encontrar essas pequenas figuras ao lado do texto. Elas têm o objetivo de chamar a sua atenção para determinados trechos do conteúdo, com uma função específica, como apresentamos a seguir.



DESTAQUE: são definições, conceitos ou afirmações importantes às quais você deve estar atento.



GLOSSÁRIO: Informações pertinente ao texto, para situá-lo melhor sobre determinado termo, autor, entidade, fato ou época, que você pode desconhecer.



SAIBA MAIS: se você quiser complementar ou aprofundar o conteúdo apresentado na apostila, tem a opção de links na internet, onde pode obter vídeos, sites ou artigos relacionados ao tema.



PARA REFLETIR: vai fazer você relacionar um tópico a uma situação externa, em outro contexto



EXERCÍCIOS: são momentos para você colocar em prática o que foi aprendido.

1. Do que trata a matemática financeira?

1.1. Do estudo do valor do dinheiro no tempo

Receber R\$100,00 hoje não é a mesma coisa que receber R\$100,00 daqui a 60 dias.

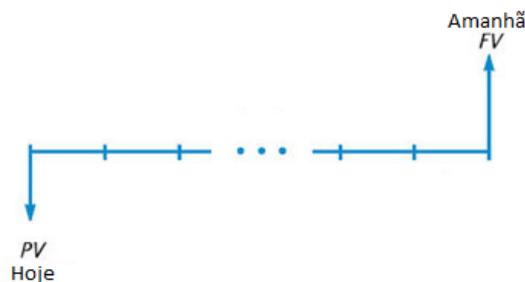


Portanto, o sacrifício de receber R\$100,00 após 60 dias tem que ser recompensado. O valor deste sacrifício é definido pelos **juros**.

Juros: é a remuneração do capital aplicado numa operação financeira.

1.2. As taxas de juros devem ser eficientes para remunerar:

- O risco (incerteza futura);
- A perda do poder de compra do capital pela inflação;
- E gerar um lucro que compense a privação do consumo imediato, ou o rendimento de outra aplicação mais rentável.



2. Conceitos básicos

2.1. Juros

Ouvimos constantemente frases como estas:

- “Vou depositar meu dinheiro em uma caderneta de poupança, pois ele renderá juros”
- “Vou emprestar meu dinheiro, pois ele renderá juros”

O estudo que vamos iniciar agora – Matemática Financeira –, como todas as suas fórmulas e fatores, é feito em função do crescimento de certa quantia em dinheiro aplicada com o tempo, isto é, dos juros.

Designando por capital a quantia emprestada, teremos:

- R\$ 100,00 são o capital (também denominado Principal ou Valor Presente - PV)

- R\$ 36,00 são os juros

Assim, podemos dizer que juros é a remuneração, a qualquer título, atribuída ao capital.

Mas como determinar, na prática, o valor dos juros a serem cobrados ou recebidos? A resposta é simples: por meio de uma taxa percentual, referida a um intervalo de tempo, a determinada taxa de juros (i).

No exemplo, podemos dizer que a taxa de juros (i) considerada foi de:

$$i = \frac{J}{PV} = \frac{36}{100} * 100$$

$$i = 0,36 * 100$$

$$i = 36\%$$

A taxa de juros (i) também pode ser representada por duas formas equivalentes:

36% ao ano (a.a.) e 0,36 ao ano (a.a.)

Como no estudo de percentagem, a primeira representação recebe o nome de forma percentual; já a segunda, de forma unitária (decimal).

Sempre que falamos de juros relativos a um capital, estamos nos referindo à remuneração desse capital durante um intervalo de tempo que denominamos Período Financeiro ou Período de Capitalização. Logo:



Juros - é a remuneração do capital, ou seja, o seu rendimento mediante determinada taxa por um certo período de tempo.

2.2. Taxas unitárias e percentuais

A taxa de juros (i) é a unidade de medida dos Juros.

A taxa correspondente à remuneração paga pelo uso, durante determinado tempo, de 01 (uma) unidade de capital é uma taxa unitária.

- **Exemplo:**

Um capital de R\$1.000,00 aplicado a 20% ao ano rende juros, ao final deste período, de:

$$Juros = \$1.000,00 \times 20\%$$

$$Juros = \$1.000,00 \times \frac{20\%}{100}$$

$$Juros = \$200,00$$

A taxa percentual de 20% ao ano indica um rendimento de 0,20 por unidade de capital aplicada. A taxa correspondente à remuneração paga pelo uso, durante determinado tempo, de 100 (cem) unidades de capital é uma taxa centesimal ou percentual, que se refere aos “centos” do ca-

pital, ou seja, o valor dos juros para cada centésima parte do capital.

Deste exemplo, tem-se:

$$Juros = \$1.000,00 \times 20\%$$

$$Juros = \frac{\$1.000,00}{100} \times 20$$

$$Juros = \$200,00$$

O capital de \$1.000,00 tem dez centos. Como cada cento rende 20, a remuneração total da aplicação no período é \$200,00. A transformação da taxa percentual em unitária se processa simplesmente pela divisão da notação percentual por 100, e para a transformação da taxa unitária em percentual basta multiplicar a taxa unitária por 100.

$$Taxa\ Unitária = \frac{Taxa\ Percentual}{100}$$

$$Taxa\ Percentual = Taxa\ Unitária \times 100$$

• **Exemplo:**

Taxa percentual	Taxa unitária
1,5%	0,015
8%	0,08
17%	0,17
84%	0,84
120%	1,20

2.3. Outras definições fundamentais

- **Capital** - é o valor aplicado por meio de alguma operação financeira. Também conhecido como: principal, valor atual, valor presente ou valor aplicado.
- **Período** - Toda transação financeira deve necessariamente prever quando (datas de início e do término da operação) e por quanto tempo (duração da operação) se dará a cessão (o empréstimo) do capital. Este prazo deve estar expresso em determinada unidade de tempo (que pode ser: dia, mês, bimestre, trimestre, semestre, ano, etc.).
- **Montante** - é o valor emprestado ao tomador acrescido dos juros cobrados (C + J). Também conhecido como valor futuro.

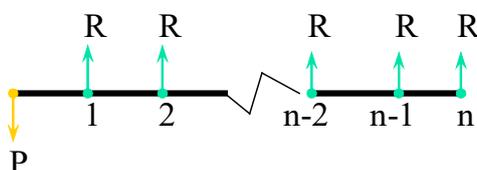
3. Resumindo

PV = Principal, Vr. Presente ou Valor Inicial (\$);
FV = Montante, Valor Futuro ou Valor Final (\$);
PMT = Pagamentos, Prestações, Parcelas (\$);
i = Taxa de juros ao período (%);
n = Período de tempo (dia, mês, ano, etc.);
J = Valor dos Juros (\$).

- **Juro (J):** É a remuneração do capital empregado.
- **Capital (PV):** É qualquer valor expresso em moeda e disponível em determinada época.
- **Taxa de Juros (i):** É a razão entre os juros recebidos (ou pagos) no final de um certo período de tempo e o capital inicialmente aplicado (ou emprestado).

$$i = \frac{J}{PV}$$

A maioria dos problemas em Matemática Financeira envolve receitas e despesas que ocorrem em instantes de tempo diferentes. Por isso, é útil adotar-se uma representação que possibilite visualizar cada alternativa.



A escala horizontal representa o tempo em ano, mês, semestre e trimestre.
R= Entradas de caixa ou receita;
P= Saída de caixa ou despesa.



Exercícios

- 1) Como será representado no diagrama de fluxo de caixa um investimento no valor de R\$ 100.000,00 pelo qual o investidor recebeu R\$ 150.000,00 após 6 meses?
- 2) Como será representado no diagrama de fluxo de caixa um empréstimo tomado de R\$ 50.000,00 pelo qual o tomador pagará R\$ 75.000,00, após 5 meses?
- 3) Desenhe o diagrama de fluxo de caixa de uma série de depósitos de R\$ 10.000,00 cada um, feitos no início de cada mês durante um ano numa Caderneta de Poupança, que rendeu, no fim do ano, um montante final de R\$ 200.000,00.
- 4) Desenhe o diagrama de fluxo de caixa para uma pessoa que, durante 6 meses, fez depósitos de R\$ 25.000,00 numa Caderneta de Poupança, sempre no início de cada mês. Nos três meses que se seguiram, perdeu o emprego e foi obrigada a fazer retiradas de R\$ 60.000,00, também no início de cada mês, tendo esgotado o seu saldo.

Regime de capitalização

Entendemos por regime de capitalização o processo de formação do juro. Há dois regimes: a juros simples e a juros compostos.

- Regime de capitalização simples (ou linear);
- Regime de capitalização composto (ou exponencial).

1. Regras básicas

1. Nas fórmulas de matemática financeira todos os cálculos são efetuados utilizando-se a taxa unitária de juros. Já os enunciados e as respostas dos exercícios são indicados pela taxa percentual.
2. Nas fórmulas de matemática financeira, tanto o prazo da operação como a taxa de juros (i) devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo.

- **Exemplos:**

a) Um fundo de poupança que esteja oferecendo os juros de 2% ao mês e os rendimentos sendo creditados mensalmente.

- Obedece a regra de expressar a taxa de juros (i) e o prazo de capitalização na mesma unidade de tempo (**mensal**).

b) Um fundo de poupança que esteja oferecendo os juros de 2% ao ano e os rendimentos sendo creditados mensalmente.

- Não obedece a regra de expressar a taxa e o prazo de capitalização na mesma unidade de tempo, pois a taxa de juros (i) está expressa ao ano e o período de capitalização em meses.

Os critérios de transformação do prazo e da taxa para a mesma unidade de tempo podem ser efetuados por meio das regras de juros simples (média aritmética) e de juros compostos (média geométrica), dependendo do regime de capitalização definido para a operação. Como regra, adota-se o ano comercial de 360 dias e o mês de 30 dias.

2. Regime de capitalização simples

Este regime de capitalização comporta-se como se fosse uma progressão aritmética, crescendo os juros de forma linear ao longo do tempo. Nesse critério, os juros incidem somente sobre o capital inicial da operação.

- **Exemplo:** Vamos admitir um empréstimo de \$1.000,00 pelo prazo de 5 anos, pagando-se juros simples de 10% ao ano.

Ano	Saldo no início de cada ano	Juros apurados para cada ano	Saldo devedor ao final de cada ano	Crescimento anual do saldo devedor
Início do 1º ano	-	-	1.000,00	-
Fim do 1º ano	1.000,00	100,00	1.100,00	100,00
Fim do 2º ano	1.100,00	100,00	1.200,00	100,00
Fim do 3º ano	1.200,00	100,00	1.300,00	100,00
Fim do 4º ano	1.300,00	100,00	1.400,00	100,00
Fim do 5º ano	1.400,00	100,00	1.500,00	100,00

• **Observações importantes:**

1. Os juros incidem exclusivamente sobre o capital inicial de R\$1.000,00 e apresentam valores idênticos ao final de cada ano ($0,10 \times \$1.000,00 = \$100,00$);
2. Em consequência, o crescimento dos juros no tempo é linear (\$100,00 por ano) como o de uma progressão aritmética, atingindo um total nos cinco anos de \$500,00;
3. Se os juros simples não forem pagos ao final de cada ano, a remuneração do capital emprestado somente se opera pelo seu valor inicial (\$1.000,00), não ocorrendo remuneração sobre os juros que se formam no período;
4. Como os juros variam linearmente no tempo, a apuração do custo total da dívida no prazo contratado é processada simplesmente pela multiplicação do número de anos pela taxa anual, isto é: 5 anos x 10% ao ano = 50% para os 5 anos.

3. Regime de capitalização composto

Por este regime de capitalização, incorpora-se ao capital não somente os juros referentes a cada período, mas também os juros sobre os juros acumulados até o momento anterior.

Admitindo-se o exemplo anterior, que a dívida de \$1.000,00 deve ser paga em juros compostos, à taxa de 10% ao ano:

Ano	Saldo no início de cada ano	Juros apurados para cada ano	Saldo devedor ao final de cada ano	Crescimento anual do saldo devedor
Início do 1º ano	-	-	1.000,00	-
Fim do 1º ano	1.000,00	100,00	1.100,00	100,00
Fim do 2º ano	1.100,00	110,00	1.210,00	110,00
Fim do 3º ano	1.210,00	121,00	1.331,00	121,00
Fim do 4º ano	1.331,00	133,10	1.464,10	133,10
Fim do 5º ano	1.464,00	146,41	1.610,51	146,41

• **Observações importantes:**

1. No critério composto, os juros não incidem unicamente sobre o capital inicial de \$1.000,00, mas sobre o saldo total existente no início de cada ano, que incorpora o capital inicial mais os juros incorridos em períodos anteriores;
2. Os juros do 1º ano são produto da incidência da taxa de 10% ao ano, sobre o capital emprestado de \$1.000,00, totalizando \$100,00;
3. No 2º ano, os \$210,00 de juros acumulados ao saldo devedor inicial identificam a seguinte operação:

Juros referentes ao 1º ano	$0,10 * \$1.000,00 = \$100,00$
Juros referentes ao 2º ano:	$0,10 * \$1.000,00 = \$100,00$
Juros sobre os juros apurados no 1º ano:	$0,10 * \$100,00 = \$10,00$
	$\$100,00 + \$100,00 + \$10,00 = \$210,00$

4. Resumindo

- **Juros Simples** - só o principal (PV) rende juros ao longo da vida do investimento.
- **Juros Compostos** - após cada período, os juros são incorporados ao capital e passam, por sua vez, a render juros.
- **Exemplo:** Considere R\$ 100,00 empregados a 10% ao ano.

	Juros simples	Juros compostos
Principal	100	100
Após 1 ano	$100 + 0,10 \times 100 = 110$	$100 + 0,10 \times 100 = 110$
Após 2 anos	$110 + 0,10 \times 100 = 120$	$110 + 0,10 \times 110 = 121$
Após 3 anos	$120 + 0,10 \times 100 = 130$	$121 + 0,10 \times 121 = 133,1$
Após 4 anos	$130 + 0,10 \times 100 = 140$	$133,1 + 0,10 \times 133,1 = 146,41$

- **Observação:** Na prática, no Brasil, empregam-se juros compostos.



• Regime de capitalização

Entendemos por regime de capitalização o processo de formação do juro. Há dois regimes de capitalização: a juros simples e a juros compostos.

- a. No Regime de Capitalização de Juros Simples**, por convenção, apenas o capital Inicial rende juro, isto é, os juros formados no fim de cada período a que se refere a taxa não é incorporada ao capital inicial para, também, render juros no período seguinte. Dizemos, neste caso, que os juros não são capitalizados.
- b. No regime de Capitalização de Juros Compostos**, os juros formados no fim de cada período são incorporados ao capital inicial no início desse período, passando esse montante a render juros no período seguinte. Dizemos, então, que os juros são capitalizados.



Exercícios

1) Preencha a Tabela a seguir, admitindo um empréstimo de \$1.550,00 pelo prazo de 5 anos, pagando-se juros simples de 25% ao ano.

Ano	Saldo no início de cada ano	Juros apurados para cada ano	Saldo devedor ao final de cada ano	Crescimento anual do saldo devedor
Início do 1º ano	-	-	1.550,00	-
Fim do 1º ano				
Fim do 2º ano				
Fim do 3º ano				
Fim do 4º ano				
Fim do 5º ano				

2) Admita um empréstimo de \$1.550,00 pelo prazo de 5 anos, pagando-se juros compostos 25% ao ano.

Ano	Saldo no início de cada ano	Juros apurados para cada ano	Saldo devedor ao final de cada ano	Crescimento anual do saldo devedor
Início do 1º ano	-	-	1.550,00	-
Fim do 1º ano				
Fim do 2º ano				
Fim do 3º ano				
Fim do 4º ano				
Fim do 5º ano				

3) Um investidor aplicou R\$ 2.500,00 em Letras de Câmbio, por 60 dias, e, ao resgatá-las, após esse prazo, recebeu a quantia de R\$ 2.590,00.

- a) Quanto recebeu de juros?
b) A que taxa esteve aplicado seu capital durante esse período?

4) Um industrial pediu um empréstimo de R\$ 250.000,00 numa instituição financeira, por certo tempo. No dia em que foi liberado o empréstimo, pagou, antecipadamente, 22% de juros, conforme previa o contrato.

a) Quanto pagou de juros?

b) Se os juros foram retidos na data da liberação do empréstimo, qual foi a quantia efetivamente liberada?

c) Considerando a quantia liberada como empréstimo real e o pagamento final de R\$ 250.000,00, qual a taxa efetiva de juros paga pelo industrial?

5) Um capital de R\$ 80.000,00 ficou aplicado durante seis meses a 10% ao mês. Calcule o montante no fim de cada mês nos regimes de capitalização simples e composta.

6) Represente com um diagrama de fluxo de caixa as seguintes operações financeiras:

a) Uma aplicação de R\$ 50.000,00 pela qual o investidor recebe R\$ 80.000,00 após dois anos.

b) A compra de um objeto, cujo preço à vista é R\$ 30.000,00, em 12 prestações mensais de R\$ 2.600,00, vencendo a primeira na data da compra.

c) Depósitos de R\$ 5.000,00 na caderneta de poupança, no fim de cada mês durante um ano, e retirada de R\$ 61.677,81 dois meses após o último depósito.

Juros simples

São produzidos unicamente sobre o capital inicial. Seu valor é calculado a partir da seguinte expressão:

$$J = C * i * n$$

Em que:

J = Valor dos juros expresso em unidade monetária;

C = Capital Inicial;

i = taxa de juros (i), expressa em sua forma unitária;

n = prazo.

Esta é a fórmula básica tanto para o cálculo dos juros como dos outros valores financeiros nela representados mediante simples dedução algébrica.

- **Exemplos:**

1) Um capital de \$80.000,00 é aplicado à taxa de 2,5% ao mês durante um trimestre. Pede-se determinar o valor dos juros acumulados neste período.

$$\begin{aligned} J &=? \\ C &= \$80.000,00 \\ i &= 0,025 \text{ a.m} \\ n &= 3 \text{ meses} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= C \times i \times n \\ J &= 80.000 \times 0,025 \times 3 \\ J &= \$6.000,00 \end{aligned}$$

2) Um negociante tomou um empréstimo pagando uma taxa de juros (i) simples de 6% ao mês durante nove meses. Ao final deste período, calculou em \$270.000,00 o total dos juros incorridos na operação. Determine o valor do empréstimo.

Dados do exercício:

$$\begin{aligned} J &= \$270.000,00 \\ C &=? \\ i &= 0,06 \text{ a.m} \\ n &= 9 \text{ meses} \end{aligned}$$

Solução:

$$\begin{aligned} J &= C \times i \times n \\ 270.000 &= C \times 0,06 \times 9 \\ C &= \$500.000,00 \end{aligned}$$

3) Um capital de \$40.000,00 foi aplicado num fundo de poupança por 11 meses, produzindo um rendimento financeiro de \$9.680,00. Pede-se apurar a taxa de juros (i) oferecida por esta operação.

$$\begin{aligned} J &= \$9.680,00 \\ C &= \$40.000,00 \\ i &=? \% \text{ a.m} \\ n &= 11 \text{ meses} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= C \times i \times n \\ 9.680 &= 40.000 \times i \times 11 \\ i &= 0,0220 \text{ a.m} \times 100 \\ i &= 2,2\% \text{ a.m} \end{aligned}$$

4) Uma aplicação de \$250.000,00 rendendo uma taxa de juros (i) de 1,8% ao mês produz, ao final de determinado período, juros no valor de \$27.000,00. Calcular o prazo da aplicação.

$$\begin{aligned} J &= \$27.000,00 \\ C &= \$250.000,00 \\ i &= 0,018 \text{ a. m} \\ n &=? \text{ meses} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= C \times i \times n \\ 27.000 &= 250.000 \times 0,018 \times n \\ n &= 6 \text{ meses} \end{aligned}$$



Exercícios

Exercite seu conhecimento

- 1) Determine os juros simples correspondentes a uma aplicação de \$25.000,00 a 80% ao semestre (a.s.), durante dois anos.
- 2) Calcule os juros simples de \$20.000,00 a 2% ao mês (a.m.), durante 2,5 anos.
- 3) Calcule os juros simples de um capital de \$300.000,00 a 20% ao ano (a.a.), durante 45 dias.
- 4) A que taxa devemos aplicar o capital de \$10.000,00 para que em 1 ano 3 meses e 5 dias produza \$2.275,00 de juros simples?
- 5) Durante quanto tempo deve ficar aplicado um capital à taxa de juros (i) simples de 11% a.m., para que seus juros se igualem ao capital?
- 6) A quantia de \$1.500,00 foi aplicada à taxa de juros (i) simples de 42% a.a. pelo prazo de 100 dias. Quais serão os juros desta aplicação?
- 7) Durante quanto tempo um capital colocado a taxa de juros (i) simples de 5% a.a. rende juros a 1/50 de seu valor?
- 8) Calcular os juros simples da aplicação de \$250.000,00 à taxa de 4% a.a. no fim de 88 dias.

1. Montantes de juros simples

Um determinado capital, quando aplicado a uma taxa periódica de juros por determinado tempo, produz um valor acumulado denominado de **montante**, que em juros simples é identificado pela letra "M".

Montante é o capital acrescido de seus juros.

Ele é representado pela equação:

$$M = C + J \quad \text{ou} \quad FV = PV + J$$

Sendo:

$$J = Cin$$

Tem-se:

$$M = C + Cin$$

Evidenciando C, a fórmula do montante a juros simples é:

$$M = C * (1 + i * n) \quad \text{ou} \quad FV = PV * (1 + i * n)$$

- **Exemplo:**

1) Uma pessoa aplica \$18.000,00 à taxa de 1,5% ao mês durante 8 meses. Determinar o valor acumulado ao final deste período.

Dados do exercício:

$$C = \$18.000,00$$

$$i = 0,015 \text{ a.m}$$

$$n = 8 \text{ meses}$$

$$M = ?$$

Solução:

$$M = C * (1 + i * n)$$

$$M = 18.000 * (1 + 0,015 * 8)$$

$$M = \$20.160,00$$



Exercícios

1) Um capital de \$3.000,00 foi colocado à taxa de juros (i) simples de 35,7% ao trimestre, durante 1 ano, 3 meses e 20 dias. Qual o montante final?

2) Para garantir um empréstimo de \$50.000,00, um comerciante assina uma promissória no valor de \$111.500,00 que vence em 300 dias. Qual a taxa de juros (i) simples que ele está comprometendo-se a pagar?

3) Qual a taxa mensal de juros simples necessária para um capital triplicar em um ano?

4) Uma pessoa empregou seu capital a taxa de 5% ao ano retirou no fim de 6 meses, capital e juros e colocou-os a taxa de 6% ao ano durante 4 meses, recebendo no fim deste prazo \$20.910,00. Calcule o capital inicial, considerando o regime de juros simples.

5) Em uma instituição, foram aplicados \$20.000,00 a 10% a m, e, noutra instituição financeira, foram aplicados \$18.000,00 a 12% a m. Depois de quanto tempo os montantes serão iguais, considerando o regime de juros simples?

2. Taxas proporcionais e equivalentes em juros simples

Em toda operação financeira, temos sempre a existência de dois prazos: o prazo a que se refere a taxa de juros (i): $i = 5\% \text{ a m}$, e o prazo de capitalização (ocorrência) dos juros: $n = 5$ meses. Em muitos casos, esses prazos não são coincidentes.

Por exemplo, sabe-se que a caderneta de poupança paga aos seus depositantes uma taxa de juros (i) de 6% ao ano, a qual é capitalizada ao principal todo mês, por meio de um percentual proporcional de $0,5\%$. Tem-se aqui dois prazos – prazo da taxa: ano e prazo de capitalização: mês.

Para o uso das fórmulas da matemática financeira, esses prazos têm que ser iguais e, portanto, devem ser transformados, deixando-os na mesma unidade de medida. Esta transformação é denominada de taxa proporcional de juros.



A taxa proporcional é obtida pela divisão entre a taxa de juros (i) considerada na operação e o número de vezes em que ocorrerão os juros (quantidade de períodos de capitalização).

- **Exemplos:**

1) Qual a $i \text{ m}$ (taxa mensal) proporcional a $48\% \text{ a a.}$?

Se:

$$i_1 = 48\% \text{ a. a}$$

$$n_1 = 1 \text{ ano}$$

$$i_2 = ?\% \text{ a. m}$$

$$n_2 = 12 \text{ meses}$$

Decorre que:

$$i_2 = \frac{i_1}{n_1} \quad i_2 = \frac{48}{12} \quad i_2 = 4\% \text{ a. m}$$

As taxas de juros são ditas equivalentes, quando, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo volume linear de juros e, conseqüentemente, o mesmo montante linear de juros.

2) Em juros simples, um capital de \$500.000,00, se aplicado a 2,5% ao mês ou 15% ao semestre pelo prazo de um ano, produz o mesmo montante linear de juros:

$$J (2,5\% \text{ a m}) = 500.000 * 0,025 * 12 = \$150.000,00$$

$$J (15\% \text{ a s}) = 500.000 * 0,15 * 2 = \$150.000,00$$

- Os juros produzidos pelas duas taxas lineares de juros são iguais, logo são definidas como Taxas Equivalentes.
- No regime de juros simples, taxas proporcionais e taxas equivalentes são consideradas a mesma coisa, sendo indiferente a classificação de duas taxas de juros como proporcionais ou equivalentes.

Para fixar o seu conhecimento, faça o que é pedido nestes três tópicos:

1) Dada a taxa de 34,5 % ao trimestre, determine as taxas proporcionais para:

- | | |
|-----------------|------------------|
| a) Um Ano. | d) Um Mês. |
| b) Um Semestre. | e) 17 Dias. |
| c) Um Bimestre. | f) 2 m e 7 dias. |

2) Determine a taxa de juros (i) anual proporcional, dadas as seguintes taxas:

- a) 3% a t.
- b) 27% ao quadrimestre.
- c) 5% a m.

3) Se um capital de \$2.000,00 rendeu \$840,00 de juros em 2 anos, qual é a taxa de juros (i) equivalente trimestral?



Exercícios

1) Calcule o montante de uma aplicação de R\$ 50.000,00, à taxa de 2,5% ao mês, durante 2 anos.

2) Uma pessoa aplicou R\$ 90.000,00 no mercado financeiro e, após 5 anos, recebeu o montante de R\$ 180.000,00. Qual foi a taxa anual?

3) Um capital foi aplicado à taxa de 45% ao ano em 12/02/90. Em 03/05/90 foi efetuado o resgate no valor de R\$ 107,80. Qual o valor do capital inicial?

4) Um investidor aplicou R\$ 200.000,00 no dia 06/01/90, a taxa de 27% ao ano. Em que data esse capital elevar-se-á a **R\$ 219.500,00**?

5) Um negociante obteve R\$ 441.000,00 de empréstimo, à taxa de 21% ao ano. Alguns meses depois, tendo encontrado quem lhe oferecesse a mesma importância a 18% ao ano, assumiu o compromisso com essa pessoa e, na mesma data, liquidou a dívida com a primeira. Um ano depois de realizado o primeiro empréstimo, saldou o débito e verificou que pagou ao todo R\$ 82.688,00 de juros. Calcule o prazo do primeiro empréstimo?

6) Transformar 2 anos, 3 meses e 12 dias em:

- a) Anos
- b) Meses
- c) Dias

7) Qual a taxa anual proporcional a 1,4% ao mês?

8) Calcule os juros de um investimento de R\$ 2.500,00, à taxa de 3% ao mês, pelo prazo de 1 ano, 4 meses e 10 dias.

9) Um investimento de R\$ 2.800,00 rendeu em 1 ano, 5 meses e 3 dias a importância de R\$ 2.872,80. Calcule a taxa mensal dessa rentabilidade.

10) Que quantia deve-se investir à taxa de 3% a.m., para que se tenha ao final de 1 ano, 4 meses e 6 dias uma renda de R\$ 97.200,00?

- 11) Calcule os juros e o montante de uma aplicação de R\$ 200.000,00 a 4,8% a. m., pelo prazo de 2 anos, 3 meses e 12 dias.
- 12) Um investidor aplica $\frac{2}{5}$ de seu capital a 3,5% a.m. e o restante a 24% ao semestre. Decorridos 2 anos, 3 meses e 15 dias, recebe um total de R\$ 313.500,00 de juros. Calcule o seu capital.
- 13) Um investidor aplicou R\$ 120.000,00 a 42% a. a. Decorrido um certo tempo, a taxa foi diminuída para 3% ao mês. Calcule o prazo em que vigorou a taxa de 3% ao mês, sabendo que em 7 meses os juros totalizaram R\$ 27.000,00.
- 14) Duas aplicações, uma a taxa de 4,8% ao mês e a outra a 3,6 ao mês, renderam, em 1 ano e 3 meses, R\$ 99.000,00 de juros. Calcular cada uma dessas aplicações, sabendo que os juros da primeira excederam os da segunda em R\$ 1.800,00.
- 15) A que taxa devemos investir para que, em 10 anos, o montante seja o dobro da aplicação inicial?

Juros compostos

Dizemos que um capital está empregado a juros compostos ou no regime de capitalização composta, se, no fim de cada período financeiro determinado, os juros produzidos são somados ao capital para formar um novo capital, produzir juros no período seguinte e, assim, sucessivamente. São os “juros sobre juros” ou “juros capitalizados”.

O montante de juros compostos é dado por:

$$FV = PV \times (1 + i)^n \quad \text{ou} \quad M = C * (1 + i)^n$$

Identificando-se:

PV = Valor Presente ou Capital

FV = Valor Futuro ou Montante

n = Período

i = Taxa

Sabe-se que o valor monetário dos juros (J) é apurado pela diferença entre o montante (FV) e o Capital (PV), podendo-se obter o seu resultado também pela seguinte expressão:

$$J = FV - PV$$

$$\text{Como: } FV = PV * (1 + i)^n$$

Colocando-se PV em evidência, obtém-se a fórmula dos juros compostos:

$$J = PV \times [(1 + i)^n - 1]$$

- **Exemplos:**

1) Se uma pessoa deseja obter \$27.500,00 dentro de um ano, quanto deverá ela depositar hoje numa alternativa de poupança que rende 1,7% de juros compostos ao mês?

Dados do exercício:

$$FV = \$27.500,00$$

$$n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$$

$$i = 1,7\% \text{ a.m}$$

$$PV = ?$$

Solução:

$$FV = PV * (1 + i)^n$$

$$27.500 = PV * (1 + 0,017)^{12}$$

$$PV = \$22.463,70$$

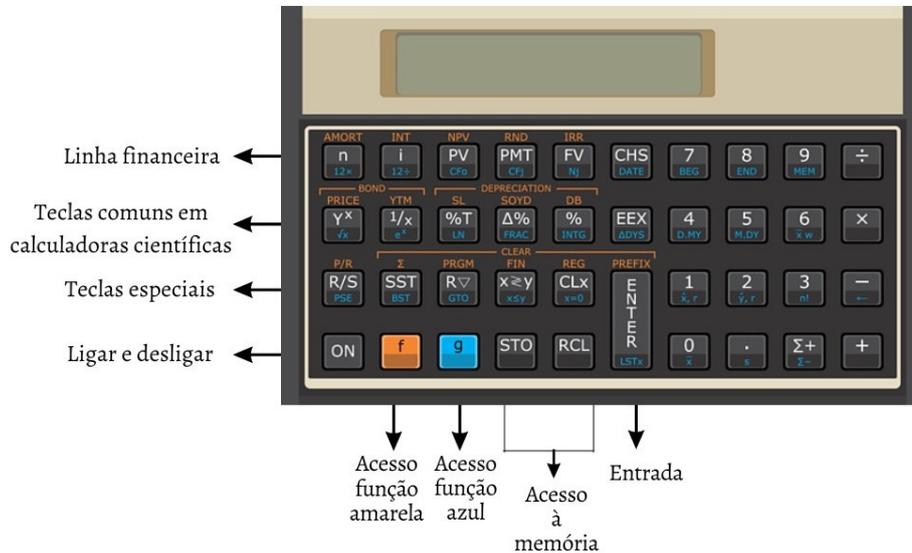
Solução utilizando a calculadora HP 12c

Teclas	Visor	Significado
f FIN f REG	0,00	Limpa Registros
27.500 FV	27.500	Valor do Montante
1,7 i	1,7	Taxa em meses
PV	-22.463,70	Valor Presente



Saiba mais: Tutorial de uso da HP12c: <https://www.youtube.com/watch?v=RRp-9M0iTPn8>

Consulte também o “Manual de Uso da Calculadora HP12c” disponível no portal online.



2) Qual o valor de resgate de uma aplicação de \$12.000,00 em um título pelo prazo de 8 meses à taxa de juros (i) composta de 3,5% a m?

Dados do exercício:

$FV = \$12.000,00$
 $n = 8 \text{ meses}$
 $i = 0,035 \text{ a. m}$
 $FV = ?$

Solução:

$FV = PV \times (1 + i)^n$
 $FV = 12.000,00 \times (1 + 0,035)^8$
 $FV = \$15.801,71$

Solução utilizando a calculadora HP 12c

Teclas	Visor	Significado
f FIN f REG	0,00	Limpa Registros
12.000 CHS PV	-12.000,00	Valor da Aplicação
8 n	8	Prazo em meses
3,5 i	3,5	Taxa em meses
FV	15.801,71	Valor do Resgate

3) Determine a taxa mensal composta de juros de uma aplicação de \$40.000,00 que produz um montante de \$43.894,63 ao final de um quadrimestre?

Dados do exercício:

$$PV = \$40.000,00$$

$$FV = \$43.894,63$$

$$n = 4 \text{ meses}$$

$$i = ? \% \text{ a.m.}$$

Solução:

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$43.894,63 = 40.000,00 \times (1 + i)^4$$

$$1,0974 = (1 + i)^4$$

$$\sqrt[4]{1,0974} = \sqrt[4]{(1 + i)^4}$$

$$(1,0974)^{1/4} = 1 + i$$

$$i = 0,0235 \text{ a.m.} \times 100$$

$$i = 2,35\% \text{ a.m.}$$

Solução utilizando a calculadora HP 12c

Teclas	Visor	Significado
f FIN f REG	0,00	Limpa Registros
40.000 CHS PV	-40.000,00	Valor da Aplicação
43.894,63 FV	43.894,63	Valor do Resgate
4 n	4	Prazo em meses
i	2,35	Taxa ao mês

4) Uma aplicação de \$22.000,00 efetuada em certa data produz, à taxa composta de juros de 2,4% ao mês, um montante de \$26.596,40 em certa data futura. Calcular o prazo da operação.

Dados do exercício:

$$PV = \$22.000,00$$

$$FV = \$26.596,40$$

$$i = 0,024 \text{ a.m.}$$

$$n = ? \text{ meses}$$

Solução:

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$26.596,40 = 22.000,00 \times (1 + 0,024)^n$$

$$1,0974 = (1 + i)^4$$

$$1,2089 = (1,024)^n$$

$$LN 1,2089 = n \times LN 1,024$$

$$0,1897 = n \times 0,0237$$

$$n = 8 \text{ meses}$$

Solução utilizando a calculadora HP 12c

Teclas	Visor	Significado
f FIN f REG	0,00	Limpa Registros
22.000 CHS PV	-22.000,00	Valor da Aplicação
26.596,40 FV	26.596,40	Valor do Resgate
2,4 i	2,4	Taxa ao mês
n	8	Prazo em meses



Exercícios

1) Demonstrando a solução pela fórmula matemática e pelas teclas financeiras da HP – 12C, calcule o montante de uma aplicação financeira de \$80.000,00 admitindo os seguintes prazos e taxas:

- a) $i = 5,5\%$ a m e $n = 2$ anos;
- b) $i = 9\%$ ao bimestre e $n = 1$ ano e 8 meses;
- c) $i = 12\%$ a a e $n = 108$ meses.

2) Demonstrando a solução pela fórmula matemática e pelas teclas financeiras da HP – 12C, calcule os juros de uma aplicação financeira de \$100.000,00 admitindo os seguintes prazos e taxas:

- a) $i = 1,5\%$ a m e $n = 1$ ano;
- b) $i = 3,5\%$ ao trimestre e $n = 2$ anos e meio
- c) $i = 5\%$ a s e $n = 3$ anos.

3) Demonstrando a solução pela fórmula matemática e pelas teclas financeiras da HP – 12C, calcule a que taxa mensal deve ser colocado um capital de \$48.000,00 para que renda de juros compostos \$4.806,25 em 8 meses?

4) Demonstrando a solução pela fórmula matemática e pelas teclas financeiras da HP – 12C, calcule em quanto tempo um capital dobra se for colocado à taxa de 10% ao mês?

- a) Em regime de Juros Compostos?
- b) Em regime de Juros Simples?

5) Se eu quiser comprar um carro no valor de \$12.000,00, quanto devo aplicar hoje para que daqui a 7 meses tenha tal valor, admitindo-se uma taxa de juros (i) de 3,5% ao mês? Demonstre a solução pela fórmula matemática e pelas teclas financeiras da HP – 12C.

6) Calcule a taxa mensal de juros de uma aplicação de \$6.600,00 que produz um montante de \$7.385,81 ao final de 7 meses.

7) Em quanto tempo duplica um capital que cresce à taxa de juros (i) compostos de 2,2% ao mês?

1. Taxas proporcionais e equivalentes em juros compostos

Os conceitos emitidos para taxas equivalentes no regime de juros simples são os mesmos para o regime de juros compostos, diferenciando-se, no entanto, a fórmula de cálculo da taxa de juros (i), e o fato de no regime de juros compostos as taxas proporcionais não serem equivalentes, conforme demonstrado no exemplo a seguir:

• **Exemplo:**

1) Três investidores A, B, e C, tem cada um \$10.000,00 para aplicar. A aplicou a 120% a.a.; B aplicou a 60% a.s., e C aplicou a 10% a.m. Quais os montantes de cada um, depois de decorrido um ano?

Capitalização Anual (A)	Capitalização Semestral (B)	Capitalização Mensal (C)
$FV = PV \times (1 + i)^n$ $FV = 10.000,00 \times (1 + 1,20)^1$ $FV = \$22.000,00$	$FV = PV \times (1 + i)^n$ $FV = 10.000,00 \times (1 + 1,60)^2$ $FV = \$25.600,00$	$FV = PV \times (1 + i)^n$ $FV = 10.000,00 \times (1 + 1,10)^{12}$ $FV = \$31.348,28$

1.1. Definição

Duas Taxas são equivalentes, quando aplicadas sobre o mesmo capital, durante o mesmo prazo (períodos de capitalização diferentes), produzem montantes iguais.

$$FV_1 = PV \times (1 + i_1)^{n_1} \quad (1)$$

$$FV_2 = PV \times (1 + i_2)^{n_2} \quad (2)$$

Se por definição $FV_1 = FV_2$ e $PV = PV$, logo, fazendo (1) = (2) vem a fórmula geral de equivalência em Juros Compostos:

$$(1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$$

• **Exemplo:**

1) Determinar a taxa semestral equivalente a 10% a m.

Dado que:

$$i_1 = 10\% \text{ a. m}$$

$$n_1 = 6 \text{ meses}$$

$$i_2 = ? \% \text{ a. s.}$$

$$n_2 = 1 \text{ semestre}$$

Solução:

$$(1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$$

$$(1 + 0,10)^6 = (1 + i_2)^1$$

$$(1,1)^6 - 1 = i_2$$

$$i_2 = 0,7716 \text{ a. s} \times 100$$

$$i_2 = 77,16\% \text{ a. s}$$

Cálculo das taxas equivalentes compostas utilizados a HP – 12c:		
Teclas	Visor	Significado
f FIN f REG	0,00	Limpa Registros
1 CHS PV	-1,00	Valor Presente

(Continua)

Cálculo das taxas equivalentes compostas utilizados a HP – 12c:

10 i	10,00	Taxa i1 mensal dada
6 n	6,00	Prazo n1 mensal equivalente
FV	1,77	Valor Futuro
1 n	1,00	Prazo n2 semestral equivalente
i	77,16	Taxa i2 semestral equivalente



Exercícios

- 1) Determine a taxa anual equivalente a 10% a. m.?
- 2) Determine as seguintes taxas:

a) Mensal equivalente a 520% a a.	d) Trimestral equivalente a 82,25% a s.
b) Anual equivalente a 12,5% a m.	e) Diária equivalente a 19,75% a m.
c) Semestral equivalente a 14% a m.	

3) Qual a melhor opção? Aplicar um capital de \$60.000,00 à taxa de juros (i) compostos de 9,9% ao semestre ou à taxa de 20,78% ao ano?

2. Resumindo

No regime de capitalização composto (RCC), a taxa de juros (i) incide somente sobre o montante acumulado no final do período anterior.

- **Exemplo:** Uma operação de empréstimo de R\$ 100,00 por três meses, à taxa de 60% a.m., os juros de cada período incidirão sempre no montante do final do período anterior.

Capital = PVP	Juros 60 % a.m.	Montante = FV
R\$ 100,00	R\$ 60,00	R\$ 160,00
R\$ 160,00	R\$ 96,00	R\$ 256,00
R\$ 256,00	R\$ 153,60	R\$ 409,60
R\$ 409,60	R\$ 245,76	R\$ 655,36
R\$ 100,00	R\$ 555,36	R\$ 655,36

No regime de juros compostos nunca multiplique ou divida a taxa!

- **Exemplo:** Qual o montante obtido de uma aplicação de R\$ 500,00 feita por três meses a uma taxa de 5% a.m.?

$$VF = 500,00 (1 + 0,05)^3 = 578,81$$

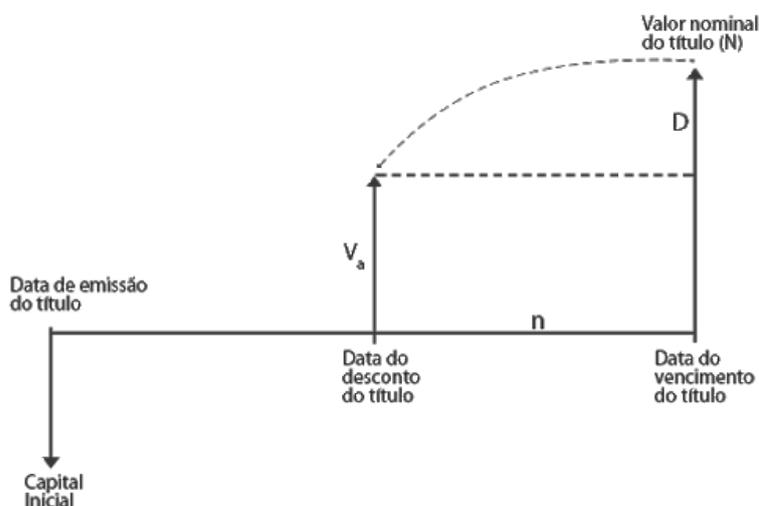
Use a Calculadora HP 12 C para o Montante (FV).

Desconto simples

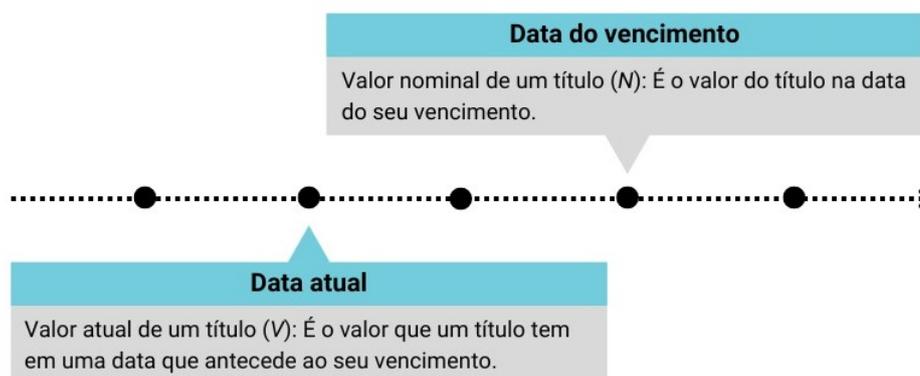
No sistema financeiro, as operações de empréstimo são muito utilizadas pelas empresas e pessoas físicas. Essas operações geram ao credor um título de crédito, que é a garantia da dívida. O título é a “conta a ser paga” ou o “boleto de pagamento”.



Esses títulos têm datas de vencimento predeterminadas, mas o devedor tem o direito de antecipar o pagamento. Caso isso aconteça, um abatimento chamado de desconto é efetuado. Logo, o desconto é a recompensa da operação de se liquidar um título antes de seu vencimento.



Para se calcular o desconto, é necessário entender, primeiramente, a diferença entre valor atual e valor nominal.



O cálculo do valor nominal ou atual é dado por:

$$N = C * (1 + i * n)$$

Em que:

N = valor nominal

C = valor atual

i = taxa de juros (i)

n = período

Visto isso, tem-se que: **Desconto = Valor Nominal - Valor Atual**



Desconto é a diferença entre o valor nominal de um título e o seu valor atualizado apurado “n” períodos antes de seu vencimento. Por outro lado, valor descontado de um título é o seu valor atual na data do desconto, sendo determinado pela diferença entre o valor nominal e o desconto.

Ou seja:

$$Vr = N - D$$

Em que:

Vr = Valor Descontado

N = Valor Nominal

D = Desconto

O desconto pode ser:

- “**Por dentro**” (ou **racional**) – calculado sobre o valor atual, utilizado nos juros compostos.
- “**Por fora**” (ou **bancário**, ou **comercial**) – calculado sobre o valor nominal, utilizado nos juros simples.

- **Desconto racional (ou “por dentro”)**

O desconto racional, também denominado de desconto “por dentro”, é dado por:

$$Dr = C \times i \times n$$

Sendo:

Dr = Desconto Racional

C = Capital (ou Valor Atual)

i = Taxa periódica de Juros

n = Prazo do desconto

Substituindo o Capital (C) pela sua respectiva formula ($C = N / (1 + i * n)$), na equação anterior, tem-se que:

$$Dr = \frac{N * i * n}{1 + i * n}$$

Em que:

Dr = Desconto Racional (ou recompensa da liquidação antecipada);

N = Valor Nominal (ou valor de resgate ou montante);

i = Taxa periódica de Juros

n = Prazo do desconto

A partir desta fórmula é possível calcular o valor do desconto racional (Dr) obtido de determinado valor nominal (N) a uma dada taxa simples de juros (i) e a determinado prazo de antecipação (n).

Já o Valor Descontado (Vr) é obtido pela equação:

$$VR = \frac{N}{1 + i * n}$$

É importante ressaltar que os juros ou desconto incidem sobre o capital (valor presente) do título, ou seja, sobre o valor liberado da operação.

- **Exemplos:**

1) Seja um título de valor nominal de \$4.000,00 vencível em um ano, que está sendo liquidado 3 meses antes de seu vencimento. Com 42% a. a. a taxa nominal de juros simples, pede-se calcular o desconto e o valor descontado “por dentro” desta operação:

Dados do exercício:

$$N = \$4.000,00$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$i = 42\% \text{ a. a. } \div 12$$

$$i = 3,5\% \text{ a. m. } \div 100$$

$$i = 0,035 \text{ a. m.}$$

$$Dr = ? \$$$

$$Vr = ? \$$$

Solução: Valor do desconto

$$Dr = \frac{N \times i \times n}{(1 + i \times n)}$$

$$Dr = \frac{4.000,00 \times 0,035 \times 3}{(1 + 0,035 \times 3)}$$

$$Dr = \frac{420}{(1,105)}$$

$$Dr = \$380,10$$

Valor descontado:

$$Vr = N - Dr$$

$$Vr = 4.000,00 - 380,10$$

$$Vr = \$3.619,90$$

ou:

$$Vr = \frac{N}{(1 + i \times n)}$$

$$Vr = \frac{4.000,00}{(1 + 0,035 \times 3)}$$

$$Vr = \$3.619,90$$

2) Determine a taxa mensal de desconto racional simples de um título negociado 60 dias antes de seu vencimento, sendo seu valor de resgate igual a \$26.000,00 e valor atual na data do desconto de \$24.436,10. Como no desconto racional, o desconto é aplicado sobre o valor atual (capital liberado) do título, logo, temos a seguinte solução:

Dados do exercício:

$$n = 60 \text{ dias} = 2 \text{ meses}$$

$$N = \$26.000,00$$

$$Vr = \$24.436,10$$

Solução:

$$Dr = Vr \times i \times n$$

$$i = \frac{Dr}{Vr \times n}$$

$$Vr = \frac{26.000 - 24.436,10}{24.436,10 \times 2}$$

$$i = \frac{1.563,90}{48.872,20}$$

$$i = 0,032 \text{ a. m. } \times 100$$

$$i = 3,2\% \text{ a. m.}$$

1. Desconto comercial (bancário ou “por fora”)

Em operações bancárias, é usado o desconto comercial simples (DC). De forma simplificada, o “desconto por fora” é assim denominado por incidir sobre o valor nominal (valor de resgate ou montante) do título e não sobre o valor descontado (capital ou valor atual) como ocorre no desconto racional.

O “desconto por fora” é dado por:

$$Df = N \times i \times n$$

Em que:

Df = Desconto por fora

N = Valor Nominal

i = Taxa de juros (i)

n = período

O valor líquido recebido ou valor descontado “por fora” (VF) é dado pela seguinte fórmula:

$$Vf = N - Df$$

$$Vf = N - N \times i \times n$$

Logo, tem-se que:

$$Vf = N \times (1 - i \times n)$$

Sendo:

Vf = Valor Descontado “Por fora”

N = Valor Nominal

i = Taxa de juros (i)

n = Período

- **Exemplos:**

1) Seja um título de valor nominal de \$4.000,00, vencível em um ano, que está sendo liquidado 3 meses antes de seu vencimento. Sendo de 42% a a. a taxa nominal de juros simples, pede-se calcular o desconto e o valor descontado “por fora” dessa operação:

Dados do exercício:

$$N = \$4.000,00$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$i = 42\% \text{ a. a. } \div 12$$

$$i = 3,5\% \text{ a. m. } \div 100$$

$$i = 0,035 \text{ a. m.}$$

$$Dr = ? \$$$

$$Vr = ? \$$$

Solução: Valor do desconto

$$Df = N \times i \times n$$

$$Df = 4.000,00 \times 0,035 \times 3$$

$$Df = \$420,00$$

Valor descontado:

$$Vf = N \times (1 - i \times n)$$

$$Vf = 4.000,00 \times (1 - 0,035 \times 3)$$

$$Vf = 4.000,00 \times 0,8950$$

$$Vf = \$3.580,00$$

2) Determine a taxa mensal de desconto comercial simples de um título negociado 60 dias antes de seu vencimento, sendo seu valor de resgate igual a \$26.000,00 e valor atual na data do desconto de \$24.436,10.

Dados do exercício:

$$i = ? \% \text{ a m}$$

$$n = 60 \text{ dias} = 2 \text{ meses}$$

$$N = \$26.000,00$$

$$Vf = \$24.436,10$$

Solução:

$$DF = N - VF$$

$$DF = 26.000,00 - 24.436,10$$

$$DF = \$1.563,90$$

A taxa aplicada sobre o valor nominal do título é de 3,0075% a. m., contudo, a taxa efetiva desta operação é a determinada pelo desconto racional.

$$DF = N \times i \times n$$

$$1.563,90 = 26.000,00 \times i \times 2$$

$$\frac{1.563,90}{26.000,00} = i \times 2$$

$$0,0602 = i \times 2$$

$$\frac{0,0602}{2} = i$$

$$\frac{0,0602}{2} = i$$

$$i = 0,0301 \text{ a. m.} \times 100$$

$$i = 3,0075\% \text{ a. m.}$$



Exercícios

Exercite o que você aprendeu.

1) Um agricultor pretende saldar um título de R\$ 4.600 referente a compras de sementes em quatro meses antes de seu vencimento a uma taxa de desconto racional de 30% a.a. Determine o valor do desconto racional e o valor descontado.

2) O desconto racional de um título referente à venda de um bezerro, vencendo em 247 dias, é igual a R\$ 1.687,25. Calcule o valor nominal se a taxa de desconto é de 30% a.a.

3) Uma nota promissória referente a uma compra de fertilizantes, no valor de R\$ 15.000 em seu vencimento, foi descontada três meses antes de seu vencimento. Sabendo que a taxa de desconto comercial é 60% a.a., calcule o valor do desconto e o valor atual.

4) O desconto comercial simples de um título referente à compra de uma colheitadeira foi de R\$ 90.000; e a taxa de desconto, de 80% a.a. Quanto tempo faltaria para o vencimento do título se seu valor nominal fosse de R\$ 150.000?

5) O que é mais vantajoso: descontar um título com vencimento para 3 meses numa instituição que trabalha com uma taxa de desconto comercial de 3% a.m. ou uma outra instituição que trabalha com uma taxa de juros (i) simples de 3,15% a.m.?

6) Uma duplicata de valor nominal R\$ 500,00 foi descontada 45 dias antes do vencimento a uma taxa de desconto comercial de 3% a.m.

a) Qual o valor líquido produzido?

b) Qual a taxa mensal de juros simples que o cliente está pagando?.

7) Uma duplicata foi descontada 90 dias antes do vencimento produzindo um valor líquido igual a 90% do valor nominal. Qual a taxa mensal de desconto?.

Rendas certas ou anuidades – Cálculo de prestações

Rendas ou anuidades são um conjunto de depósitos ou de pagamentos periódicos destinados a constituir um capital ou amortizar uma dívida.

- Cada um dos pagamentos de uma série pode ser denominado de termo, prestação ou simplesmente pagamento da renda.
- O intervalo de tempo entre os vencimentos de dois termos consecutivos denomina-se período da renda ou intervalo de pagamento.
- A soma dos períodos define a duração da série de pagamentos ou anuidades.

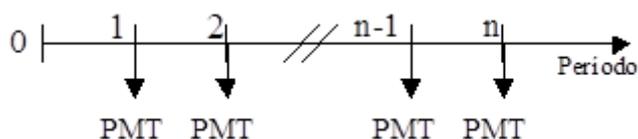
1. Classificação das séries de pagamentos (rendas)

Quanto à sua Periodicidade	Certas
	Aleatórias
Quanto à sua Duração	Temporárias
	Perpétuas
Quanto aos seus Valores	Constantes
	Variáveis
Quanto ao seu Período de Ocorrência	Imediatas
	Antecipadas
	Diferidas

2. Classificação das rendas certas quanto ao pagamento da primeira prestação

2.1. Rendas imediatas

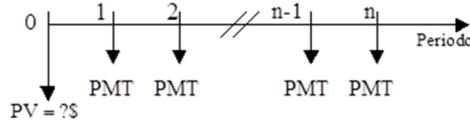
São aquelas cujo primeiro pagamento ocorre no final do 1º período e o último pagamento se dá no fim do último período (n).



• **Cálculo do valor presente de uma renda imediata**

O cálculo do valor presente de um fluxo de caixa de renda imediata é dado a partir da descapitalização das prestações constantes (PMT), descrito pela fórmula:

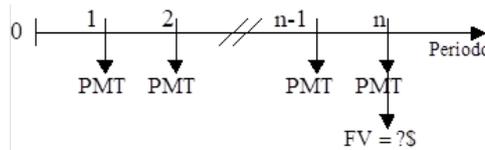
$$PV = PMT * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$



• **Cálculo do valor futuro de uma renda imediata**

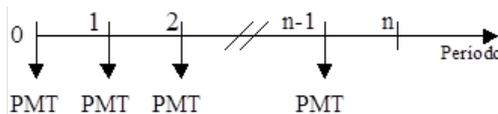
O cálculo do valor futuro de um fluxo de caixa de renda imediata é dado a partir da capitalização das prestações constantes (PMT), descrito pela fórmula a seguir:

$$FV = PMT * \frac{1 - (1+i)^{-n} - 1}{i}$$



2.2. Rendas antecipadas

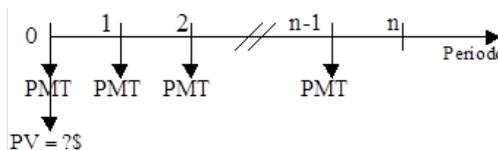
São aquelas cujo primeiro pagamento ocorre no início do 1º período e o último pagamento se dá no início do último período (n).



• **Cálculo do valor presente de uma renda antecipada**

O cálculo do valor presente de um fluxo de caixa de renda antecipada é dado a partir da descapitalização das prestações constantes (PMT), descrito pela fórmula a seguir:

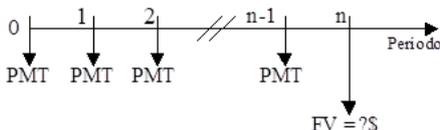
$$PV = PMT * \frac{1 - (1+i)^{-n} - 1}{i} * (1+i)$$



• Cálculo do valor futuro de uma renda antecipada

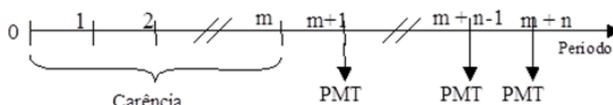
O cálculo do valor futuro de um fluxo de caixa de renda antecipada é dado a partir da capitalização das prestações constantes (PMT), descrito pela fórmula a seguir:

$$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i)$$



2.3. Rendas diferidas

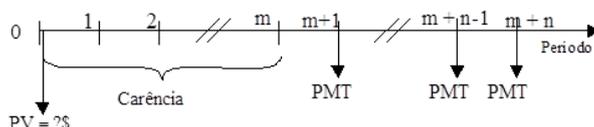
Caracterizam-se por ter um prazo de carência (m) antes do primeiro pagamento.



• Cálculo do valor presente de uma renda diferida

O cálculo do valor presente de um fluxo de caixa de renda diferida é dado a partir da descapitalização das prestações constantes (PMT), descrito pela fórmula a seguir:

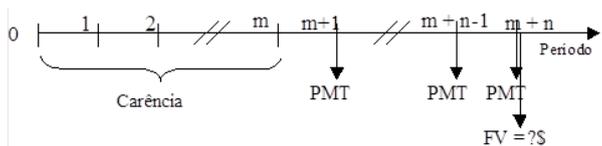
$$PV = PMT * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} * (1+i)^{-m}$$



• Cálculo do valor futuro de uma renda diferida

O cálculo do valor futuro de um fluxo de caixa de renda diferida é dado a partir da capitalização das prestações constantes (PMT), descrito pela fórmula a seguir:

$$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$



• Exemplos:

1) Determinado produto, cujo preço à vista é \$6.800,00, está sendo vendido com uma entrada de 20% do preço e o restante em seis prestações mensais com juros de 5,5% a. m. De quanto serão a entrada e as prestações?

Dados do exercício:

$$\text{Preço à vista} = \$6.800,00$$

$$\text{Entrada} = \text{Preço à vista} \times 20\%$$

$$\text{Parte Financiada} = \text{Preço à vista} - \text{Entrada}$$

$$n = 6 \text{ Pagamentos}$$

$$i = 5,5\% \text{ a. m.}$$

$$\text{Entrada} = ? \$$$

$$\text{PMT} = ? \$$$

Solução:

$$\text{Entrada} = \text{Preço à vista} \times 20\%$$

$$\text{Entrada} = 6.800,00 \times 0,20$$

$$\text{Entrada} = \$1.360,00$$

$$\text{Parte Financiada} = \text{Preço à vista} - \text{Entrada}$$

$$\text{Parte Financiada} = 6.800,00 - 1.360,00$$

$$\text{Parte Financiada} = \$5.440,00 = PV$$

$$PV = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$5.440,00 = PMT \times \frac{1 - (1 + 0,055)^{-6}}{0,055}$$

$$5.440,00 = PMT \times 4,9955$$

$$PMT = \$1.088,97$$

Solução na HP 12c		
Teclas	Visor	Significado
f FIN f REG	0,00	Limpa Registros
6800 ENTER 20 %	1.360,00	Valor da Entrada
(-) CHS PV	-5.440,00	Parte Financiada
6 n	6	Número de Prestações Mensais
5,5 i	5,5	Taxa em meses
PMT	\$1.088,97	Valor das Prestações

2) Um determinado produto, cujo preço à vista é \$6.800,00 está sendo vendido com uma entrada de 20% do preço e o restante em seis prestações mensais com juros de 5,5% a. m. De quanto serão a entrada e as prestações, considerando que a primeira deverá ser paga no ato da compra?

Dados do exercício:

$$\text{Preço à vista} = \$6.800,00$$

$$\text{Entrada} = \text{Preço à vista} \times 20\%$$

$$\text{Parte Financiada} = \text{Preço à vista} - \text{Entrada}$$

$$n = 6 \text{ Pagamentos}$$

$$i = 5,5\% \text{ a. m.}$$

$$\text{Entrada} = ? \$$$

$$\text{PMT} = ? \$$$

Solução na HP 12c		
Teclas	Visor	Significado
f FIN f REG	0,00	Limpa Registros
G BEG	BEGIN	Configuração para Fluxos de Caixa Antecipados
6800 ENTER 20 %	1.360,00	Valor da Entrada
(-) CHS PV	-5.440,00	Parte Financiada
6 n	6	Número de Prestações Mensais
5,5 i	5,5	Taxa em meses
PMT	\$1.032,20	Valor das Prestações

3) Um financiamento no valor de \$35.000,00 é concedido para pagamento em 12 prestações mensais, iguais, com 3 meses de carência. Para uma taxa de juros (i) de 3,5% a m, determine o valor das prestações.

Dados do exercício:

Valor do Financiamento = \$35.000,00

n = 12 Pagamentos

m = 3 meses de carência

i = 3,5% a. m.

PMT =? \$

Solução: Valor do desconto

$$PV = PMT \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)^{-m}$$

$$35.000,00 = PMT \times \frac{1 - (1+0,035)^{-12}}{0,035} \times (1+0,035)^{-3}$$

$$35.000,00 = PMT \times 9,6633 \times 0,9019$$

$$PMT = \$4.015,71$$

Solução na HP 12c		
Teclas	Visor	Significado
f FIN f REG	0,00	Limpa Registros
35000 CHS PV	-35.000,00	Valor do Financiamento
3 n	3,00	Período de Carência
3,5 i	5,50	Taxa em meses
FV	38.805,12	Valor Futuro
f FIN	38.805,12	Limpa Registros
CHS PV	-38.805,12	Valor do Saldo Devedor
12 n	12,00	Número de Prestações
3,5 i	3,50	Taxa em meses
PMT	\$4.015,71	Valor das Prestações



Exercícios

- 1) Um terreno está à venda em 7 pagamentos mensais, iguais e consecutivos, de \$4.000,00, para uma taxa de juros (i) de 2,6% a. m. Até que preço compensa vender o terreno à vista?
- 2) Um bem, cujo preço à vista é \$10.000,00, está sendo vendido com uma entrada de 20% do preço e o restante em 5 prestações mensais imediatas com juros de 2,5% a. m. De quanto serão a entrada e as prestações?
- 3) Uma pessoa quer comprar um apartamento, cujo preço à vista é \$80.000,00, mas só dispõe de \$48.000,00 para dar como entrada e pode pagar prestações mensais de, no máximo, \$500,00. Em quantas prestações, no mínimo, poderá comprar o apartamento se a taxa de juros (i) para comprá-lo a prazo é 1,5% a. m. e de quanto serão as prestações, se forem iguais?
- 4) Um empréstimo de \$55.000,00 está sendo pago com 10 prestações mensais de \$5.963,88. Qual a taxa mensal de juros cobrada pelo credor?
- 5) Com o objetivo de fazer uma poupança, uma pessoa deposita \$1.000,00 no fim de cada mês, numa instituição financeira que paga juros de 0,75% a. m. Qual será o montante no fim do ano, após efetuar seu 12º depósito?
- 6) Faltando oito pagamentos mensais de \$5.400,00 para o término de um contrato de financiamento, o financiado deseja liquidá-lo. Quanto deverá pagar (na data em que pagaria o primeiro dos oito pagamentos), se a taxa para avaliação da dívida é 4,5% a. m.?
- 7) Um carro está sendo vendido a prazo em 4 pagamentos mensais de \$5.000,00. Sendo de 2,5% a. m. a taxa de juros (i), determine o seu valor final, admitindo que o primeiro pagamento seja efetuado no ato da compra.
- 8) Um banco concedeu o empréstimo de \$50.000,00 em 12 prestações mensais e iguais, com 4 meses de carência. Para uma taxa de juros (i) de 1,5% a. m., qual o valor das prestações? E o valor futuro?

Empréstimos – sistemas de amortização

O conceito de amortização se refere ao processo de extinção de uma dívida por meio de pagamentos periódicos, que são realizados de acordo com um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do capital ou dos juros do saldo devedor - pode, ainda, ser o reembolso de ambos.



Do ponto de vista financeiro, uma dívida tem origem quando certa importância é emprestada por determinado prazo. Nos sistemas de amortização a serem abordados, os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor. Isso significa que trabalharemos somente com o regime de juros compostos por retratar melhor, como já dissemos, a realidade financeira.

O ponto central deste módulo consiste em “desdobrar” as operações financeiras, demonstrando, período a período, a situação do saldo devedor, das cotas de juros, de amortização, das parcelas de retorno e outros custos porventura imputados nos empréstimos.

O desdobramento dos empréstimos, aqui tratado, é de fundamental importância na contabilização das operações financeiras, posto que “abre” seus itens para a escrituração nas rubricas próprias.

- **Exemplo:**

Uma empresa ao receber um empréstimo, leva a débito da conta caixa ou banco conta movimento o valor recebido, com a contrapartida creditando a conta de obrigações com bancos ou de terceiros. Ao efetuar o pagamento de prestação de retorno, credita a conta caixa e debita a conta de juros, pelo valor da cota de juros, e debita, pelo valor da cota de amortização, a conta de obrigações com bancos ou terceiros. Observe que, no pagamento dos empréstimos, somente são levadas as despesas e, por consequências dedutíveis ao Imposto de Renda, a parcela relativa aos juros, na rubrica de despesas financeiras.

Alguns termos e nomenclaturas são importantes explicitar para uniformização de procedimentos.

- **Mutuante ou credor:** é aquele que concede o empréstimo.
- **Mutuário ou devedor:** é aquele que recebe o empréstimo.
- **Creditado:** é aquele que recebe o crédito em contrato de abertura de crédito em conta corrente.
- **Taxa de juros (i):** é aquela pactuada entre as partes. Como vimos anteriormente, pode ou não se refere à taxa efetiva, dependendo das condições adotadas.
- **Prazo de utilização:** corresponde ao intervalo de tempo que o empréstimo leva para ser transferido do credor para o devedor. Pode ser em uma única parcela ou em várias parcelas, como é o caso de empréstimos destinados a investimentos programados (construção, ampliação de parque industrial, aquisição de equipamentos, etc.).
- **Prazo de carência:** corresponde ao intervalo de tempo compreendido entre a última utilização e o pagamento da primeira parcela de amortização. Durante o prazo de carência, os

juros incidentes sobre o saldo devedor podem ou não serem liquidados ao final de dado período de capitalização. Caso não sejam pagos, eles se incorporarão ao saldo devedor e serão amortizados juntamente com o principal durante o período de retorno.

- **Prazo de amortização:** corresponde ao intervalo de tempo compreendido entre o início e término da amortização do empréstimo ou da devolução do total do débito.
- **Periodicidade de amortização:** corresponde ao intervalo de tempo decorrido entre duas amortizações.
- **Prazo total do financiamento:** corresponde à soma do prazo de carência ao prazo de amortização, acrescido do prazo de utilização.
- **Saldo devedor:** é o estado da dívida em determinado instante. Observe que, pelo princípio da equivalência de capitais, o saldo devedor em determinado instante será sempre igual ao valor atual das prestações ou parcelas de retorno vincendas, posto que o valor atual pressupõe que a exclusão dos juros a decorrerem nos períodos futuros.
- **Cotas de amortização:** correspondem às parcelas de devolução do principal ou capital emprestado.
- **Cotas de juros:** correspondem ao valor do encargo ou juros de cada período. É obtido por meio da multiplicação do saldo devedor imediatamente anterior pela taxa de juros (i) ($J = C \times i$, visto que $t = 1$). Observe, aqui, uma operação realizada no regime de juros compostos é calculada pela fórmula de juros simples, visto que o capital utilizado como base de cálculo será sempre o capitalizado ou o amortizado.
- **Prestação ou parcela de retorno:** corresponde à soma da cota de amortização, da cota de juros e de outros encargos pagos em determinado período.
- **Planilha:** é um quadro onde são desdobrados os empréstimos, observado o cronograma dos valores objeto da operação.

1. Sistemas de amortização

Consistem nas diversas formas de se devolver um capital emprestado as quais foram dadas as denominações:

1. Sistema do Montante (M):

- **Funcionamento:** Ocorre um único pagamento (capital + juros) no final do período estipulado.
- **Equação:** $M = C(1 + i)^n$

2. Sistema Americano (SAA):

- **Funcionamento:** Caracteriza-se pelo pagamento somente das parcelas de juros ao final de cada período de capitalização, sendo o capital resgatado, de uma só vez, no final do prazo pactual.
- **Equação:** $J = C \times i$

3. Sistema Francês de Amortização (SAF) ou Tabela Price (TP):

- **Funcionamento:** Caracteriza-se pelo retorno em prestações iguais, periódicas, constantes e consecutivas ao fim de cada período de capitalização. Essas prestações são constituídas dos juros, sempre calculados sobre o saldo devedor, e de uma cota de amortização. Como as prestações são iguais, à medida que vão sendo realizados os pagamentos, os juros vão

ficando menores (saldo devedor diminuindo à mesma taxa de juros (i)), enquanto as cotas de amortização vão ficando progressivamente maiores.

- **Equação:** Sua equação é dada pela equivalência das rendas imediatas em $DF = 0$, já também conhecidas:

$$A = R \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad \text{ou} \quad A = R \times a_{\overline{n}|i}$$

A composição da prestação (R), resultante da soma da cota de amortização (a) e da cota de juros (J), é dada pela expressão:

$$R = a + J \quad \text{ou} \quad a = R - J$$

4. Sistema de Amortização Constante (SAC):

- **Funcionamento:** É caracterizado por prestações periódicas decrescentes, posto que a cota da amortização é constante e os juros decrescem em função da redução progressiva do saldo devedor. Dessa forma, a cota de amortização obtém-se dividindo o valor do empréstimo pelo número de pagamentos.
- **Equação:** Assim a primeira prestação (R_1) é igual à primeira cota de juros (J_1) mais a primeira cota de amortização (a_1).

$$a = C / n \quad J_1 = C \times i \quad R_1 = (C/n) + C \times i$$

Portanto:

$$R_1 = C(1/n + i)$$

Como o saldo devedor será decrescido à razão de $1/n$ por período, as prestações decrescem no valor de seus juros. Dessa forma, a razão de decréscimo (q) das prestações será:

$$q = \frac{C}{n} \times i$$

O valor atual de n prestações será, então dado pela expressão:

$$A_{n-1} = R_n \times \frac{n}{1 + i \times n}$$

2. Planos de amortização

Tratam-se de desdobramento das “devoluções” de capital, ou seja, referem-se às planilhas quando utilizadas para desdobrar os empréstimos.



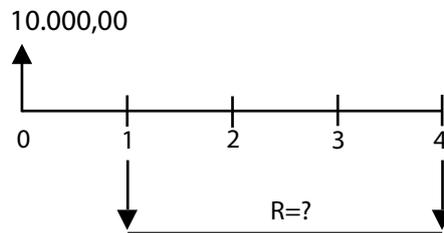
O plano de amortização é um demonstrativo analítico de um empréstimo, composto de várias colunas, que apresenta, após cada pagamento, as cotas de juros, de amortização e o saldo devedor.

• Exemplo 1:

Construa a planilha de amortização para um empréstimo de R\$10.000,00 a ser liquidado em 4 parcelas mensais, iguais e consecutivas, vencendo a primeira a um mês da concessão, realizado à taxa de juros (i) compostos de 2% a.m..

• **Solução:**

Primeiro, vamos ao cálculo do valor de cada uma das prestações, utilizando o respectivo diagrama de fluxo de caixa. Seja ele:



Como os valores do R estão dispostos na forma do SFA, a equação de equivalência, pode ser dada pela expressão:

$$10.000,00 = R \times \frac{1 - (1,02)^{-4}}{0,02}$$

$$10.000,00 = R \times 3,808$$

$$R = R\$ 2.626,24$$

Construamos, então, a Planilha de Amortizações:

Per.	Saldo devedor	Cota de amortização	Cota de juros	Prestação (A + j)
0	10.000,00	_____	_____	_____
1	7.573,76	2.426,24	200,00	2.626,24
2	5.099,00	2.474,76	151,48	2.626,24
3	2.574,74	2.524,26	101,98	2.626,24
4	(0,01)	2.574,75	51,49	2.626,24

Como o saldo devedor inicial e o valor das prestações já são conhecidos, calculamos a cota de juros contida na primeira prestação:

$$J_1 = A_0 \times i \quad J_1 = 10.000,00 \times 0,02 \quad J_1 = R\$ 200,00$$

Calculemos, agora, o valor da cota de amortização contida na primeira prestação:

$$a_1 = R_1 - J_1 \quad a_1 = 2.626,24 - 200,00 \quad a_1 = R\$ 2.426,24$$

Calculemos, agora, o saldo devedor imediatamente após pagamento da primeira parcela:

$$A_1 = A_0 - a_1 \quad A_1 = 10.000,00 - 2.426,24 \quad A_1 = R\$ 7.573,76$$

Repetamos esses procedimentos relativos nos demais pagamentos.

• **Segundo pagamento:**

$$J_2 = A_1 \times i \quad J_2 = 7.573,76 \times 0,02 \quad J_2 = R\$ 151,48$$

$$a_2 = R_2 - J_2 \quad a_2 = 2.626,24 - 151,48 \quad a_2 = R\$ 2.474,76$$

$$A_2 = A_1 - a_2 \quad A_2 = 7.573,76 - 2.474,76 \quad A_2 = R\$ 5.099,00$$

- **Terceiro pagamento:**

$$J_3 = A_2 \times i \quad J_3 = 5.099,00 \times 0,02 \quad J_3 = \text{R\$ } 101,98$$

$$a_3 = R_3 - J_3 \quad a_3 = 2.626,24 - 101,98 \quad a_3 = \text{R\$ } 2.526,26$$

$$A_3 = A_2 - a_3 \quad A_3 = 5.099,00 - 2.524,26 \quad A_3 = \text{R\$ } 2.574,74$$

- **Quarto pagamento:**

$$J_4 = A_3 \times i \quad J_4 = 2.574,74 \times 0,02 \quad J_4 = \text{R\$ } 51,49$$

$$a_4 = R_4 - J_4 \quad a_4 = 2.626,24 - 51,49 \quad a_4 = \text{R\$ } 2.574,75$$

$$A_4 = A_3 - a_4 \quad A_4 = 2.574,74 - 2.574,75 \quad A_4 = \text{R\$ } 0,01$$



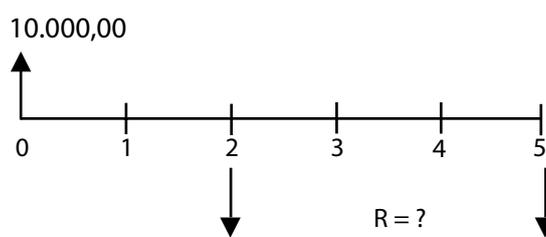
Observe que, após o último pagamento, o saldo devedor do empréstimo deve zerar. O fato de isto não ter ocorrido decorre de arredondamentos praticados na realização dos cálculos. Porém, é frequente essa ocorrência na contabilização dos empréstimos. Quando isso ocorre, normalmente esses valores são creditados ou debitados em contas de valores residuais credores ou devedores, conforme o caso.

- **Exemplo 2:**

Vamos resolver o exemplo 1, considerando que a primeira parcela vença a dois meses da concessão do empréstimo.

- **Solução:**

Teremos o seguinte diagrama de fluxo de caixa:



A equação de equivalência em $DF = 0$, será dada pela expressão:

$$10.000,00 = R \times \frac{1 - (1,02)^{-4}}{0,03} \times (1,02)^{-1}$$

$$10.000,00 = R \times 3,733$$

$$R = \text{R\$ } 2.678,76$$

Per.	Saldo devedor	Cota de amortização	Cota de juros	Prestação (A + J)
0	10.000,00	_____	_____	_____
1	10.200,00	(200,00)	200,00	_____
2	7.725,24	2.474,76	204,00	2.678,76
3	5.200,98	2.524,26	154,50	2.678,76
4	2.626,24	2.574,74	104,02	2.678,76
5	(0,00)	2.626,24	52,52	2.678,76

• **Primeiro Pagamento:**

$$J_1 = A_0 \times i \quad J_1 = 10.000,00 \times 0,02 \quad J_1 = \text{R\$ } 200,00$$

$$a_1 = R_1 - J_1 \quad a_1 = 0 - 200,00 \quad a_1 = - \text{R\$ } 200,00$$

$$A_1 = A_0 - a_1 \quad A_1 = 10.000,00 - (-200,00) \quad A_1 = \text{R\$ } 10.200,00$$

Observe que, pelo fato de não haver qualquer pagamento previsto no primeiro período, os juros a ele relativo incorporam-se ao saldo devedor sob a forma de amortização negativa.

• **Segundo Pagamento:**

$$J_2 = A_1 \times i \quad J_2 = 10.200,00 \times 0,02 \quad J_2 = \text{R\$ } 204,00$$

$$a_2 = R_2 - J_2 \quad a_2 = 2.678,76 - 204,00 \quad a_2 = \text{R\$ } 2.474,76$$

$$A_2 = A_1 - a_2 \quad A_2 = 10.200,00 - 2.474,76 \quad A_2 = \text{R\$ } 7.725,24$$

• **Terceiro Pagamento:**

$$J_3 = A_2 \times i \quad J_3 = 7.725,24 \times 0,02 \quad J_3 = \text{R\$ } 154,50$$

$$a_3 = R_3 - J_3 \quad a_3 = 2.678,76 - 154,50 \quad a_3 = \text{R\$ } 2.534,26$$

$$A_3 = A_2 - a_3 \quad A_3 = 7.725,24 - 2.524,26 \quad A_3 = \text{R\$ } 5.200,98$$

• **Quarto Pagamento:**

$$J_4 = A_3 \times i \quad J_4 = 5.200,98 \times 0,02 \quad J_4 = \text{R\$ } 104,02$$

$$a_4 = R_4 - J_4 \quad a_4 = 2.678,76 - 104,02 \quad a_4 = \text{R\$ } 2.574,74$$

$$A_4 = A_3 - a_4 \quad A_4 = 5.200,98 - 2.574,74 \quad A_4 = \text{R\$ } 2.626,24$$

• **Quinto Pagamento:**

$$J_5 = A_4 \times i \quad J_5 = 2.626,24 \times 0,02 \quad J_5 = \text{R\$ } 52,52$$

$$a_5 = R_5 - J_5 \quad a_5 = 2.678,76 - 52,52 \quad a_5 = \text{R\$ } 2.626,24$$

$$A_5 = A_4 - a_5 \quad A_5 = 2.626,24 - 2.626,24 \quad A_5 = \text{R\$ } 0,00$$

3. Resumindo

- **Sistemas de amortização**

1. Sistema de amortização francês (Tabela Price)
2. Sistema de amortização constante (SAC)
3. Sistema de amortização americano (SAA)

- **Definições básicas**

- 1. Encargos (despesas) financeiros:** representam os juros da operação, caracterizando-se como custo para o devedor e retorno para o credor.
- 2. Amortização:** refere-se exclusivamente ao pagamento do principal (capital emprestado), o qual é efetuado, geralmente, mediante parcelas periódicas. Alguns poucos tipos de empréstimos permitem que o capital emprestado seja amortizado por meio de um único pagamento ao final do período.
- 3. Saldo devedor:** representa o valor do principal da dívida, em determinado momento, após a dedução do valor já pago ao credor a título de amortização.
- 4. Prestação:** é composto do valor da amortização mais os encargos financeiros devidos em determinado período de tempo. Assim:

$$\text{PRESTAÇÃO} = \text{Amortização} + \text{Encargos financeiros}$$

- **Sistema de amortização francês (Tabela Price)**

1. O Sistema de amortização francês, amplamente adotado no mercado financeiro do Brasil, estipula, ao contrário do SAC, que as prestações devem ser iguais, periódicas e sucessivas.
2. Os juros, por incidirem sobre o saldo devedor, são decrescentes, e as parcelas de amortização assumem valores crescentes.
3. Em outras palavras, no Sistema francês os juros decrescem e as amortizações crescem ao longo do tempo. A soma dessas duas parcelas permanece sempre igual ao valor da prestação.
4. As prestações são determinadas pela aplicação da fórmula do Fator de recuperação de capital (FRC):

$$R = C \times FRC(i, n)$$

Os demais valores da planilha são mensurados de forma sequencial em cada um dos períodos.

- **Exemplo:** admita que um empréstimo de R\$ 100.000,00 deva ser pago, dentro de um prazo de 10 meses, em 10 prestações mensais, à taxa de 3% ao mês.

Período	Saldo devedor (R\$)	Amortização (R\$)	Juros (R\$)	Prestação (R\$)
0	100.000,00	-	-	-
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Total				

- **Sistema de amortização constante (SAC)**

1. O Sistema de amortização constante, como o próprio nome indica, tem como característica básica serem as amortizações do principal sempre iguais (ou constantes) em todo o prazo da operação. O valor da amortização é facilmente obtido mediante a divisão do capital emprestado pelo número de prestações.
2. Os juros por incidirem sobre o saldo devedor, cujo montante decresce após o pagamento de cada amortização, assumem valores decrescentes no período.
3. Em consequência do comportamento da amortização e dos juros, as prestações periódicas e sucessivas do SAC são decrescentes em progressão aritmética.
4. O SAC determina que a restituição do principal (capital emprestado) seja efetuada em parcelas iguais. Assim, o valor de cada amortização devida é calculado pela simples divisão entre o principal e o número fixado de prestações.

$$\text{AMORTIZAÇÃO} = \text{valor do empréstimo} / \text{número de prestações}$$

- **Exemplo:** admita que um empréstimo de R\$ 100.000,00 deva ser pago, dentro de um prazo de 10 meses, em 10 prestações mensais, à taxa de 3% ao mês.

Período	Saldo devedor (R\$)	Amortização (R\$)	Juros (R\$)	Prestação (R\$)
0	100.000,00	-	-	-
1				
2				

(Continua)

Período	Saldo devedor (R\$)	Amortização (R\$)	Juros (R\$)	Prestação (R\$)
3		-	-	-
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Total				

- **Sistema de amortização americano (SAA)**

1. O Sistema de amortização americano (SAA) estipula que a devolução do capital emprestado é efetuada ao final do período contratado da operação de uma só vez. Não se prevê, de acordo com esta característica básica do SAA, amortizações intermediárias durante o período de empréstimo. Os juros costumam ser pagos periodicamente.

- **Exemplo:** admita que um empréstimo de R\$ 100.000,00 deva ser pago, dentro de um prazo de 10 meses, pelo Sistema de amortização americano, à taxa de 3% ao mês.

Período	Saldo devedor (R\$)	Amortização (R\$)	Juros (R\$)	Prestação (R\$)
0	100.000,00	-	-	-
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Total				



Exercícios

1) R\$ 20.000,00 foram financiados para serem liquidados em 5 parcelas, bimestrais, iguais e consecutivas, com a primeira vencendo a 2 meses da concessão à taxa de juros (i) compostos de 3% a.m. Construa a planilha de amortização do empréstimo.

2) A empresa Alfa está tomando um empréstimo de R\$ 50.000,00 para ser liquidado em 4 parcelas mensais, iguais e consecutivas, com a primeira vencendo a quatro meses da concessão. Construa a planilha de amortização desse empréstimo, sabendo-se que a taxa de juros (i) compostos contratada é de 3% a.m.

3) A Cia. "Alta" está tomando um empréstimo a ser liquidado em 10 parcelas mensais, iguais e consecutivas de R\$ 2.000,00 cada, com a primeira vencendo a 1 mês da concessão, mais 5 parcelas bimestrais de R\$ 4.000,00 cada, e a primeira desta série vencendo a dois meses da concessão. Construa a planilha de amortização desse empréstimo sabendo-se que a taxa de juros (i) compostos é de 2% a.m..

4) O Sr. Tomador está obtendo um empréstimo a ser liberado em três parcelas mensais e iguais de R\$ 10.000,00 cada, com a primeira desembolsada no ato da concessão. O retorno desse empréstimo será realizado em 6 parcelas mensais e iguais, com a primeira vencendo dois meses após o crédito de sua última parcela. Construa a planilha de amortização, sabendo-se que a taxa de juros (i) compostos é de 3% a.m..

5) A empresa Dias & Dias está obtendo um empréstimo para ser liquidado em 6 parcelas mensais e iguais a R\$ 5.000,00, mais duas parcelas trimestrais e iguais a R\$ 50.000,00. Os pagamentos mensais terão início dois meses após o último desembolso do empréstimo, enquanto os pagamentos trimestrais terão início quatro meses após esta mesma data. Seu desembolso dar-se-á em 3 parcelas mensais e iguais, sendo a primeira creditada no ato da concessão. Construa a planilha de amortização, sabendo-se que a taxa de juros (i) compostos é de 3% a.m.

6) Um financiamento no valor de R\$ 200.000,00 é concedido para ser amortizado em 12 pagamentos mensais pela tabela Price. A taxa de juros contratada é de 2% ao mês. Com base nessas informações, pede-se determinar:

- a) o valor de cada prestação mensal;
- b) o saldo devedor ao final de 8 meses.

7) Um financiamento no valor de R\$ 200.000,00 é concedido para ser amortizado em 12 pagamentos mensais pelo SAC. A taxa de juros contratada é de 2% ao mês. Com base nessas informações, pede-se determinar:

- a) o valor de cada prestação mensal
- b) o saldo devedor ao final de 5 meses

8) Construa a planilha do sistema de amortização francês, com bases nos dois exercícios anteriores.

9) Construa a planilha do Sistema de amortização americano, com bases nos exercícios acima.

10) Um banco oferece um financiamento de R\$ 180.000,00 para ser liquidado em 24 pagamentos mensais, podendo na amortização ser usado tanto o SAC, o SAF ou o SAM. O financiamento

não prevê carência e a taxa de juros é de 6% ao mês. O tomador do empréstimo está em dúvida quanto ao sistema de amortização que deve escolher. Para tanto, necessita de informações adicionais com relação ao comportamento das parcelas de financiamento. Pede-se:

- A confecção das planilhas
- Em qual pagamento as parcelas das prestações se tornam iguais no SAC e no SAF
- Após 12 pagamentos, qual o percentual que o saldo devedor corresponde da dívida pelos três sistemas.
- Construa a planilha do SAA.
- Caso você fosse decidir, qual das quatro opções escolheria? Justifique sua resposta.

11) Sobre planos de amortização de empréstimos e financiamentos, responda:

a) Quais são as duas partes que compõem o valor da prestação de um plano de empréstimo?

_____ e _____

b) Qual a diferença principal entre o sistema price e o sistema de amortização constante?

c) Construa um plano de amortização para um financiamento de R\$ 1.000,00 a uma taxa de juros de 3% ao mês, com prazo de duração de 04 meses.

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo
1				
2				
3				
4				

12) Um automóvel é financiado em 60 meses. Seu valor à vista é de R\$ 60.000 e a taxa de juros cobrada pelo Banco é de 1,83% a.m.. Calcule:

a) O valor da 36ª prestação pelo SAF (Tabela Price): _____

b) O Total de juros pagos se o sistema de amortização adotado fosse o americano:

c) O Total da amortização se o sistema fosse SAC: _____

d) O Total de juros pagos se o sistema fosse SAF (Tabela Price): _____

e) O Total acumulado de juros até 45ª prestação pelo SAF: _____

f) O saldo devedor após o pagamento da 59ª prestação pelo SAF: _____

g) O saldo devedor após o pagamento da 59ª prestação pelo SAC: _____

h) O saldo devedor após o pagamento da 59ª prestação pelo SAA: _____

i) O Total de amortização acumulada até a 30ª prestação pelo SAF: _____

j) O Valor da última prestação pelo SAA: _____

4. Problemas complementares

• *Série 1 – juros simples – aplicações básicas*

1) R\$ 100,00 ficaram aplicados de 05/01/95 até 10/03/95 rendendo juros de R\$ 5,00. Qual a taxa de juros (i) simples?

2) No princípio do ano, empreguei certo capital a juros simples de 2% a.m. Decorridos 8 meses retirei o capital e os juros por ele produzidos e os apliquei a 3,5% a.m. Calcule o capital, sabendo que, ao final do ano, o meu montante (capital + juros) era de R\$ 50.000,00.

3) No princípio do ano, empreguei meu capital de R\$ 100.000,00 a juros simples de 7% a.m. Decorrido certo tempo, retirei o capital e os juros por ele produzidos e os apliquei a 10% a.m. (juros simples). Sabendo-se que ao final do ano meu montante era de R\$ 200.000,00, pergunta-se: quanto tempo o capital ficou aplicado a 7% a.m.?

4) Dois capitais foram colocados hoje a juros: o maior foi colocado a 3% a.m. e o menor a 4% a.m. Os capitais ficaram aplicados durante 8 meses. Sabe-se que a razão entre os capitais aplicados é igual a $\frac{2}{5}$ e que a diferença entre os juros foi de R\$ 40,00. Ache os capitais.

5) Uma financeira nos seus empréstimos por 5 meses cobra uma taxa de juros (i) simples de 4% a.m. e mais uma taxa de serviço sobre o valor do financiamento (a taxa de serviço é cobrada na data do financiamento). Qual é a taxa de serviço, sabendo que a financiadora está cobrando efetivamente uma taxa de juros (i) simples de 5,5 % a.m.?

6) Quanto devemos aplicar daqui a trinta dias em uma instituição que paga 3,5 % a. m. para daqui a 36 meses ter R\$ 30,00?

7) Certo capital colocado a juros simples, por 4 meses, produziu juros que representam 20% do montante. Qual a taxa de juros (i) utilizada?

8) $\frac{1}{3}$ de um capital e $\frac{2}{3}$ desse mesmo capital foram colocados a juros simples a taxas de 5% a.a., respectivamente, durante 14 meses. Calcule o capital, sabendo-se que a soma dos juros é de R\$ 84,50.

9) Certa financiadora faz empréstimos a juros simples de 4% a.m., cobrando uma taxa de serviços de 5% calculada sobre o valor de financiamento, cobrada no ato de sua liberação. Em um financiamento, feito pelo prazo de 7 meses, qual a taxa de juros (i) que o tomador efetivamente está pagando?

10) Um relógio custa R\$ 5.000,00 à vista. A loja que o vende aceita 40% do preço à vista e R\$ 3.900,00 daqui a 6 meses. Qual a taxa de juros (i) simples cobrada pela loja?

11) Em 1º de fevereiro, o preço de uma mercadoria foi reajustado em 2%. Em 1º de março foi reajustado em 3% e em 1º de abril foi novamente reajustada em 3,5%, passando a custar R\$ 15.000,00. Quanto custava essa mercadoria em 1º de janeiro?

12) Dois capitais foram colocados a juros simples por 19 meses numa instituição financeira, a uma taxa de 4% a.m. Calcule os capitais, sabendo-se que:

a) Os juros do 2º capital excederam ao do 1º em R\$ 6.500,00

b) A soma dos capitais é de R\$ 300.000,00

13) Certa financeira faz empréstimos a uma taxa de juros (i) simples de 5% a.m. cobrando uma taxa de serviços de 10% sobre o financiamento, no ato de sua liberação. Num empréstimo de R\$ 50.000,00 por 5 meses, qual é a taxa de juros (i) simples que o tomador está efetivamente pagando?

14) Certo banco fez empréstimos a juros simples de 5% a.m., mais uma taxa de serviços equivalentes a 5% a.m. do valor do financiamento, cobrada no ato de sua liberação. Num empréstimo feito por 3 meses, qual é a taxa de juros (i) simples que o tomador está efetivamente pagando?

15) O Banco "A" oferece dinheiro a 5% a.m. O Banco "B" oferece dinheiro a 4,5 % a.m., mas cobra uma taxa de serviço de 1,5 % sobre o valor do empréstimo, que é retida por ocasião do financiamento:

- a) Uma pessoa, que deseja um empréstimo por dois meses, optaria por qual banco?
- b) Se o empréstimo for de 6 meses, qual deve ser a sua opção?

16) Uma pessoa que tinha um capital de R\$ 200.000,00 para empregar, deu parte desse capital emprestado a 5% a.m. (juros simples) e o restante aplicou em títulos que lhe renderiam 43% a.m. No fim do ano, tinha um montante de R\$ 299.600,00. Qual a parte emprestada e qual a parte empregada em títulos?

17) O que é melhor: colocar R\$ 100,00 a 6% a.m. por 10 meses e R\$ 100,00 a 8% a.m. pelo mesmo prazo ou aplicar R\$ 200,00 a 7% a.m. por 10 meses?

18) No dia 1º de janeiro empreguei meu capital a 6% a.m. no regime de juros simples. Depois de 7 meses retirei o capital e os juros por ele produzidos. Em seguida, investi o montante em uma instituição financeira que paga juros simples de 9% a.m. Assim, em 31/12 desse mesmo ano, recebi um total de R\$ 52,00 de juros. De quanto era o capital?

19) Há três meses dei R\$ 10,00 emprestados a um amigo, para receber 8% a.m. de juros simples. Hoje emprestei mais R\$ 5,00, desta vez a 10% a.m. Daqui a quanto tempo terei um montante de R\$ 30,00?

20) Certo tomador, para garantir um empréstimo do R\$ 50,00, emite uma nota promissória de R\$ 60,00, com vencimento para 120 dias. Qual a taxa de juros (i) simples?

21) Quanto tempo deve permanecer aplicado um capital para que produza um montante equivalente a 8 vezes os juros produzidos pelo capital, a uma taxa de 7% a.m.?

22) A loja "Delta" está concedendo um desconto de 10% no preço de venda para aquelas efetuadas à vista. Quando concede 60 dias de prazo para pagamento, cobra 6% a.m. de juros sobre o preço de venda. Qual a taxa de juros (i) que a loja está efetivamente cobrando?

23) Durante quanto tempo deverá ficar aplicado um certo capital para que a uma taxa de 8% a.m. produza juros iguais a 2/3 do capital emprestado?

24) Uma mercadoria cujo preço de venda é de R\$ 100,00 é oferecida à vista nas seguintes condições:

- a. à vista, com desconto de 10%
- b. a prazo, com 30% de entrada e mais uma parcela de R\$ 90,00 vencíveis a 180 dias

Certa pessoa que dispõe exatamente de R\$ 100,00 deseja comprar tal mercadoria. Se optar pela compra à vista, os R\$ 100,00 que lhe sobra serão aplicados a 6% a.m. por 180 dias. Se optar pela compra a prazo, os R\$ 70,00 que lhe sobram serão aplicados nas mesmas condições. O que é

mais vantajoso para o comprador: a compra à vista ou a prazo? Explique.

25) Dois capitais X e Y foram colocados a juros simples as taxas respectivas de 6% a.m. e 8% a.m. O primeiro ficou colocado durante 3 meses e o segundo durante 6 meses. Sabe-se que a soma dos capitais é de R\$ 200,00 e a soma dos juros é de R\$ 81,00. Quais os capitais?

26) R\$ 30,00 ficaram aplicados a juros de 05/01/95 a 10/03/95 a uma taxa de 8% a.m. Qual eram os juros?

27) Em quanto tempo o montante produzido por um capital de R\$ 5,00 aplicado a 8% a.m. se iguala ao montante produzido por um capital de R\$ 8,00 aplicado a 5% a.m. Admita que o segundo capital foi aplicado na mesma data que o primeiro.

• **Série 2 – descontos comercial e racional. Equivalência de capitais no regime de juros simples**

1) O valor de face de um título (valor de aplicação) é 85% de seu valor nominal. Sabendo-se que a taxa que o aplicador ganha é de 36% a.a., juros simples, qual o prazo da aplicação?

2) Dois títulos com vencimento para 60 e 90 dias foram descontados comercialmente a uma taxa de 2,5% a.m. Sabe-se que a soma dos valores atuais é de R\$ 110.000,00, e que a soma dos valores nominais é de R\$ 1170.000,00. Quais são os valores nominais?

3) Se o valor do desconto comercial é de R\$ 165,23, qual será a taxa considerada, uma vez que o valor nominal é de R\$ 1.800,00 e o período de desconto é de 3 meses?

4) O quociente entre os descontos comercial e racional é de 1,12. Qual será o prazo de antecipação se a taxa de descontos for de 5% a.m.?

5) Dois títulos de valores nominais M1 e M2 foram descontados a taxa de 1,5 % à quinzena. O primeiro, comercialmente, a 60 dias de seu vencimento, e o segundo racionalmente, a 60 dias de seu vencimento. Sabendo-se que o montante produzido pelos descontos foi de R\$ 12.000,00 e que $M1 = \frac{2}{3}$ de M2. Determine M1 e M2.

6) Dois títulos de valores nominais R\$ 50.000,00 e R\$ 70.000,00 descontados comercialmente a 3 e 4 meses de seus vencimentos, devem ser substituídos por outro título descontado racionalmente a 5 meses de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 6% ao bimestre, determine o valor nominal desse título.

7) Tenho um amigo que me deve R\$ 5.000,00, há 6 meses. Necessitando do dinheiro, procurei-o para que me efetuasse o pagamento, quando alegou não ter disponibilidade imediata. Ele disse só ter condições para me pagar daí a quatro meses e emitiu uma nota promissória no valor de seu débito total. Como precisava do dinheiro, fui ao banco e descontei comercialmente. Sabendo-se que esta última operação produziu um desconto de R\$ 1.000,00, determine a taxa utilizada.

8) A empresa "X" obteve um empréstimo a ser liquidado em duas parcelas iguais de R\$200.000,00, vencíveis a 6 e 7 meses (a contar de hoje). Face a dificuldade financeira, a empresa deseja substituir esses títulos por outros dois vencíveis a 90 dias (depois) após os vencimentos originais. Sabendo-se que o valor nominal do último título deverá ser o dobro do penúltimo, que a taxa de desconto comercial cobrada pelo banco é de 2,5% a.m., determine os valores dos novos títulos.

9) Nos descontos comerciais com prazos de vencimentos de 3 meses, certo banco cobra uma taxa de desconto de 2,0 % a.m. e mais taxa de serviço de 5% sobre o valor líquido. Qual é a taxa mensal de juros simples que o banco está cobrando?

10) O portador de um título de R\$ 200.000,00 de valor nominal, necessitando urgente da quantia de R\$ 100.000,00, resgatou seu título, 3 meses antes do vencimento, com desconto comercial de 2% a.m. e aplicou o que lhe restou de resgate a juros simples à taxa de 2,5% a.m. Em quanto deverá montar sua aplicação depois de 120 dias?

11) Uma letra de Câmbio de valor nominal R\$ 1.000,00, com vencimento para 01/12/95, foi adquirida em 01/12/94 e seu comprador calculou que teria um lucro de 3% a.m. (juros simples). No entanto, em 01/06/95, precisou resgatá-la e o desconto comercial efetuado foi também de 3% a.m.

a) Quanto pagou pela letra ao adquiri-la e quanto recebeu ao resgatá-la?

b) Qual a taxa efetiva de juros (juros simples) mensal no período em que deixou aplicado o seu capital?

12) Dois títulos de valores nominais R\$ 60.000,00 e R\$ 80.000,00, vencíveis a 30 e 90 dias, foram substituídos por dois outros de valores nominais R\$ 50.000,00 e R\$ 110.000,00, vencíveis a 60 dias e 120 dias. Qual é a taxa, se o regime é o de desconto comercial?

13) Dois títulos de valores nominais R\$ 60.000,00 e R\$ 80.000,00, vencíveis a 30 e 90 dias, devem ser substituídos por dois outros de valores nominais N1 e N2, vencíveis a 60 e 120 dias. A taxa é de 5% a.m. e N2 é o dobro de N1. Determine N1 e N2, sabendo-se que o regime de desconto é o racional.

14) O banco "A" trabalha com uma taxa de desconto comercial de 3% a.m. e o banco "B" com uma taxa de juros (i) simples de 3% a.m.

a) Qual o prazo de vencimento que torna indiferente o desconto em A ou em B?

b) A partir de que prazo de vencimento é mais vantajoso para o cliente o desconto no banco A?

c) A partir de que prazo de vencimento é mais vantajoso para o banco B?

15) Um título de valor nominal R\$ 500.000,00 é descontado no banco A, que cobra uma taxa de desconto de 3% a.m. Na mesma data em que se desconta esse título, desconta-se no banco B - que cobra uma taxa de desconto de 2,5% a.m. - um outro título de mesmo valor nominal R\$ 500.000,00 e com vencimento 1 mês após o do anterior. Sabendo-se que os valores líquidos dos produzidos foram iguais, determine os prazos de vencimentos de cada um.

16) Dois títulos de valores nominais iguais, com vencimentos para 120 e 180 dias, foram descontados racionalmente. Se a soma dos valores líquidos representa 1,7 de N, qual é a taxa mensal de juros simples?

17) Certo título foi descontado no banco "X" que cobra uma taxa de desconto racional (juros simples) de 3% a.m. Dois meses depois, desconta-se outro título, de mesmo valor nominal, e data de vencimento, no banco "Y", que cobra uma taxa de desconto racional de 2% a.m. Quais os prazos de vencimento dos títulos, se o valor líquido do título descontado no banco "X" representa 80% do valor líquido do título descontado no banco "Y"?

18) Certa pessoa pretende levantar a importância líquida de R\$ 100.000,00 numa instituição financeira que trabalha com uma taxa de desconto de 4% a.m. Para este fim, vai emitir duas notas promissórias com vencimentos para 60 e 90 dias e cujos valores nominais são diretamente proporcionais aos números 5 e 7, respectivamente. Qual é o valor nominal de cada N.P.? ($N_1 = 5/7 N_2$)?

19) Um banco descontou uma duplicata de R\$ 300.000,00 para um cliente 108 dias antes do vencimento e depositou o valor correspondente em sua conta (desconto comercial). O extrato de conta acusou um depósito de R\$ 243.400,00 e o usual no banco é cobrar uma comissão de 0,1% sobre o valor final da duplicata. Qual foi a taxa de desconto?

• **Série 3 – juros compostos – aplicações básicas**

1) Determine o montante produzido por um capital de R\$ 200,00 aplicado à taxa de juros (i) compostos de 8% a.m., durante 6 meses.

2) Qual o capital que, aplicado à taxa de juros (i) compostos de 10% a.m., durante 8 meses, produz um montante de R\$ 450,00?

3) A que taxa mensal de juros compostos deve ficar aplicado um capital de R\$ 200,00 para, no final de 5 meses, produzir um montante de R\$ 300,00.

4) Quanto tempo leva um capital aplicado a taxa de juros (i) compostos de 10% a.m. para triplicar?

5) Certa pessoa dispõe de determinada importância para aplicar em CDB pelo prazo de 6 meses. O gerente lhe diz que a taxa de juros (i) paga pelo banco é de 10% a.m., só que no ato da aplicação é descontado do cliente 4% do valor dos juros, a título de Imposto de Renda. Qual a taxa mensal de juros que o banco está efetivamente pagando ao cliente?

6) Certo magazine concede um desconto de 10% nas vendas à vista e cobra uma taxa de 10% para aquelas realizadas com 2 meses de prazo. Qual é a taxa de juros (i) mensal utilizada pela loja?

7) Uma pessoa colocou $\frac{3}{4}$ de seu capital a taxa de 10% a.m. e o restante a 12% a.m. Calcule o montante no final de 12 meses, sabendo-se que a primeira proporcionou R\$ 160,38 de juros?

8) Uma pessoa foi ao banco solicitar um empréstimo e, quando indagado, o gerente disse que a taxa de juros (i) compostos cobrada pelo banco é de 10% a.m. antecipados (calculado sobre o valor nominal do título). Supondo que essa pessoa necessita do dinheiro por 5 meses, qual seria a taxa mensal efetiva de juros compostos cobrada pelo banco?

9) O valor da ORTN em julho de 1984 era de CR\$ 13.254,67; em julho de 1985 de CR\$45.901,41. Pergunta-se:

- a) Qual a taxa de crescimento nesses 12 meses;
- b) Qual a taxa média mensal de crescimento (equivalente)?
- c) Baseado nessa taxa de crescimento, qual seria o valor da ORTN previsto para julho de 1986?

10) Determinado banco está autorizado a cobrar no máximo uma taxa de juros (i) compostos de 12% a.m. Em seus empréstimos, uma parte dos juros é cobrada antecipadamente e outra “postecipadamente”. Sabendo-se que numa operação de 3 meses o banco cobrou uma taxa “postecipada” de 10,8% a.m., pergunta-se: qual é a taxa cobrada antecipadamente?

11) Certa pessoa aplicou um capital no regime de juros compostos pelo prazo de 6 meses. Sabe-se que do total aplicado, 40% foram investidos a 8% a.m. e os restantes 60% à taxa de 12% a.m. Qual foi a rentabilidade média mensal efetiva?

12) Certo capital foi colocado a juros compostos por 8 meses. Nos primeiros 5 meses, os juros foram capitalizados mensalmente à taxa de 8% a.m., e nos últimos 3 meses, à taxa de 10% a.m. A que taxa média mensal esteve aplicado este capital?

13) Uma pessoa colocou seu capital de R\$ 500,00 à taxa de 10% a.m. Depois de algum tempo, a taxa foi aumentada para 13% a.m. Calcule o tempo em que vigorou a taxa de 10% a.m., sabendo que no final de 1 ano seu montante era de R\$ 1.894,45.

14) Uma distribuidora de títulos imobiliários está oferecendo uma taxa efetiva de juros compostos de 9% a.m. nos seguintes papéis de sua carteira:

	Prazo até o resgate	Valor do resgate
1 –	2 m e 15 dias	R\$ 200,00
2 –	4 m e 2 dias	R\$ 280,00
3 –	6 m 8 dias	R\$ 400,00

Um determinado investidor deseja comprar os três papéis nas condições oferecidas. Quanto deverá desembolsar para a operação?

15) O sr. “Aplicador” está adquirindo um L.C. e está disposto a desembolsar exatamente R\$ 1.000,00 (entre valor de aquisição da Letra e IR na fonte) pelo prazo de 185 dias. Sabe-se que a taxa nominal de juros paga pela financeira é de 12 % a.m., e que sobre o total de juros auferidos incide uma alíquota de IR na fonte de 7%. Determine:

- O valor líquido da aquisição da L.C.;
- O valor do resgate;
- O valor do IR na fonte;
- A taxa mensal efetiva de juros obtidos pelo aplicador.

16) O banco “X” está oferecendo dinheiro a seus clientes à taxa nominal de 10% a.m. O banco “Y” está oferecendo uma taxa nominal de 9% a.m., além de uma taxa de abertura de crédito equivalente a 10% do valor emprestado, cobrada antecipadamente. Se um cliente necessitar de um empréstimo pelo prazo de 30 dias, por qual banco deve optar? E se o prazo for de 92 dias?

• Série 4 – juros compostos – equivalência de taxas e de capitais

1) R\$100,00 foram aplicados por 1 ano a taxa de 120% a.a., produzindo um montante de R\$220,00. Qual a taxa mensal, que produz, em 1 ano, esse mesmo montante?

2) R\$200,00 foram aplicados por 6 meses a taxa de 8% a.m., produzindo um montante de R\$ 317,37. Qual a taxa semestral que nesse período, produz o mesmo montante?

3) Ache a taxa mensal equivalente às seguintes taxas:

- | | |
|------------------------|---------------------|
| a) 150% ao ano. | d) 80% ao trimestre |
| b) 80% ao semestre | e) 0,5% ao dia |
| c) 50% ao quadrimestre | f) 5% a quinzena |

4) Ache a taxa trimestral equivalente às seguintes taxas:

- | | |
|------------------------|---------------------|
| a) 120% ao ano | d) 20% ao trimestre |
| b) 80% ao semestre | e) 7% ao mês |
| c) 35% ao quadrimestre | |

5) Ache a taxa equivalente às seguintes taxas:

- 120% ao ano capitalizados mensalmente
- 60% ao ano capitalizados mensalmente

- c) 24% ao trimestre capitalizados mensalmente
- d) 9% ao mês capitalizados diariamente

6) Certa financeira faz empréstimos à taxa de 10% a.m. Por ocasião da concessão, ficam retidos 5% do valor do financiamento, a título de taxa de abertura de crédito. Determinada pessoa pretende fazer o empréstimo pelo prazo de 3 meses para aplicar o dinheiro emprestado à taxa de 11% a.m. Pergunta-se:

- a) Isso será um bom negócio para o tomador? Por quê?
- b) Nas mesmas condições, se o empréstimo e a aplicação fossem por 6 meses seria vantajoso? Por quê?

7) Uma mercadoria está sendo vendida nos seguintes planos: PLANO A – R\$ 20.000,00 à vista; PLANO B – R\$ 10.000,00 de entrada mais R\$ 14.000,00 em 90 dias. Qual é a taxa mensal de juros efetivamente cobrada pela loja?

8) Você vai a uma loja que afixa uma prestação mensal referente às mercadorias. Se determinada mercadoria tem afixado o valor de R\$ 20.000,00 para 5 prestações mensais (vencendo-se a primeira a 1 mês da compra) e você sabe que a taxa de juros (i) do mercado é de 120% a.a. capitalizáveis mensalmente, qual é o maior preço à vista que você ofereceria ao vendedor?

9) Um automóvel foi vendido com uma entrada de 40% e mais 3 parcelas mensais e iguais, com a primeira vencendo a 3 meses da venda. Qual é o valor à vista do automóvel, sendo a taxa de 150% a.a. e valor das parcelas mensais R\$ 1.500,00?

10) Uma loja tem a venda uma mercadoria à vista por R\$ 120.000,00 ou em 3 parcelas bimestrais e iguais a R\$ 40.000,00 (vencendo-se a primeira a 2 meses da venda) e uma entrada. Supondo a taxa de juros (i) no mercado em 1,5% a.m., de quanto seria a entrada?

11) Determinada pessoa realiza um empréstimo de R\$ 500,00 a uma taxa de 3% a.m., com carência de 2 anos (pagamento único no final). Qual é o valor a ser depositado trimestralmente (o primeiro a três meses e o último na data de vencimento do título) em uma instituição que paga juros compostos de 2% a.m.?

12) Uma empresa tomou R\$ 350.000,00 emprestados para pagamento (único) após 34 meses a juros compostos de 13,0% a.a. Um ano após a empresa propôs pagar R\$ 200.000,00 imediatamente e liquidar o restante no final de 4 anos a partir dessa data. Qual é o valor dessa nova parcela?

13) Uma empresa deve três títulos de R\$ 700,00 cada, com vencimentos para 3, 4 e 6 meses. Ela propôs pagar a dívida com 3 pagamentos mensais e iguais no final do 6º, 7º e 8º meses. Calcule o valor desses pagamentos, sabendo-se que a taxa de juros (i) contratada é de 120% a.a. capitalizados mensalmente?

14) O preço à vista de um imóvel é R\$ 40.000,00 ou R\$ 60.000,00 a prazo. Se o comprador resolver adquirir esse imóvel a prazo deverá dar 30% de entrada e o 70% restantes em duas parcelas semestrais e iguais. Supondo que a taxa de mercado gira em torno de 8% a.m., qual a melhor opção?

15) Um financiamento de R\$ 10.000,00 deve ser resgatado em três parcelas vencíveis a 30, 60 e 90 dias. Os valores das parcelas vencíveis a 30 e 90 dias são, respectivamente de R\$ 2.000,00 e R\$ 6.000,00. Qual o valor da parcela vencível a 60 dias? Considere uma taxa de juros (i) compostos de 8% a.m.

16) O preço de um imóvel é de R\$ 1.500.000,00 o vendedor facilita a transação propondo o seguinte esquema: R\$ 100.000,00 como entrada, 2 parcelas trimestrais de R\$ 250.000,00 e um

pagamento final de R\$ 200.000,00. Se a taxa de juros (i) utilizada for de 10% a.m., quando será o último pagamento?

• Série 5 – uniformes e rendas

1) Certa pessoa obtém um financiamento para ser liquidado em 6 parcelas mensais e iguais a R\$ 70.000,00, com a primeira vencendo a um mês da concessão. Se a taxa de juros (i) for de 12% a.m., de quanto será o financiamento?

2) A loja “Delta” está oferecendo determinada mercadoria para ser paga em 12 parcelas mensais e iguais de R\$ 120,00, vencendo-se a primeira a 3 meses da compra, sem entrada. Se a taxa de juros (i) utilizada pela loja é de 15% a.m., qual é o valor à vista da mercadoria?

3) O banco “X” está concedendo empréstimos para serem liquidados em 12 parcelas mensais e iguais, vencendo a primeira no ato da concessão, à taxa de 13% a.m.. Se o valor do pagamento for de R\$ 350,00, de quanto deverá ser o empréstimo?

4) O sr. “X” tem R\$ 1.000,00 para emprestar e quer recebê-los em prestações mensais e iguais de R\$ 200,00 vencendo-se a primeira a 1 mês da concessão. Se a taxa de juros (i) adotada pelo sr. “X” é de 18% a.m., quantas prestações serão necessárias para resgatar essa dívida. O sr. “X” admite, ainda, que as eventuais diferenças de arredondamento sejam liquidadas 30 dias após o vencimento da última prestação.

5) Um imóvel, cujo preço à vista é de R\$ 20.000,00, está sendo oferecido nas seguintes condições: R\$ 2.000,00 de sinal, no ato do fechamento do negócio; R\$ 4.000,00 depois de 60 dias, e o restante em 12 prestações mensais e iguais, vencendo-se à primeira, 90 dias do negócio. Se a taxa de juros (i) for de 10% a.m., de quanto será o valor de cada uma das prestações?

6) Você está interessado na compra de um imóvel cujo preço à vista é 5.000 OTNs. O vendedor facilitará sua aquisição com o seguinte plano: 1.000 OTNs de entrada, mais 60 parcelas mensais e iguais de 100 OTNs, vencendo-se a primeira a 3 meses da compra. Sabendo-se que a taxa de mercado para operações com correção monetária plena (calculados sobre o valor das OTNs) é de 18% a.a., você aceitaria o negócio?

7) Certa pessoa realiza um empréstimo de R\$ 1.000,00 a uma taxa de 10% a.m. para liquidá-lo em uma única parcela, ao final de 5 anos. Como não poderá dispor desse montante de uma só vez, pretende formar um pecúnio de forma a liquidá-lo na data de seu vencimento. Dessa forma, irá efetuar 48 depósitos mensais e iguais (o primeiro hoje) em uma instituição que paga juros de 9,5% a.m. De quanto deverá ser cada depósito?

8) Um imóvel foi vendido com uma entrada de 10%, mais 60 parcelas mensais e iguais de 10 OTNs, vencendo-se a primeira a 5 meses da compra. Se a taxa de juros (i) for de 18% a.a., capitalizados mensalmente, qual foi o valor à vista do imóvel?

9) O Banco “X” financiará a construção da sede da empresa “Alfa”. A liberação do crédito consistirá em 12 parcelas bimestrais de R\$ 100.000,00 cada, sendo a primeira colocada à disposição do financiado no fechamento do contrato. A amortização da dívida será realizada em 40 parcelas mensais e iguais, com a primeira vencendo 60 dias após o último desembolso do crédito. Qual será o valor de cada parcela mensal de retorno, se a taxa for de 20% a.a.?

10) O Banco “X” está, por força de tabelamento de juros, autorizado a cobrar uma taxa nominal máxima de 8% a.m. em seus financiamentos. Como o banqueiro quer ter uma taxa de retorno efetiva de 10% a.m., pretende imputar uma taxa de abertura de crédito – TAC (cobrada no ato da

concessão) - de forma a mascarar a legislação vigente. Nos empréstimos a serem liquidados em 12 parcelas mensais e iguais (vencendo-se a primeira a um mês da concessão), quanto deverá ser a TAC para que a vontade do banqueiro seja satisfeita? (**Obs.:** forneça a resposta em percentual do empréstimo a ser concedido.)

11) Certa pessoa obteve um empréstimo de R\$ 500,00 para ser liquidado em 24 parcelas mensais e iguais (com a primeira vencendo a um mês da concessão), à taxa de 10% a.m. Imediatamente após o pagamento da 6ª parcela, o credor oferece ao devedor uma redução de 1% a.m. na taxa de juros (i) cobrada, desde que a dívida remanescente seja liquidada em apenas 6 prestações mensais iguais e consecutivas. Se houver concordância das partes, de quanto serão as novas prestações?

12) Certa instituição financeira paga a seus depositantes juros capitalizáveis mensalmente à taxa de 30% ao trimestre. Certa pessoa pretende formar ao final de 4 trimestres um montante de R\$ 1.000,00. Para isto, irá efetuar 2 depósitos, um no início do trimestre e outro no início do terceiro trimestre. Sabe-se, ainda, que o valor do segundo depósito é o dobro do primeiro. Qual o valor de cada depósito?

5. Respostas dos problemas complementares

• Série 1

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| 1) 2,344% a.m. | 16) Empréstimo: R\$ 80.028,23 |
| 2) R\$ 37.810,04 | Títulos: R\$ 119.971,77 |
| 3) 10 meses e 13 dias | 17) Indiferente |
| 4) R\$ 357,14 e R\$ 142,86 | 18) R\$ 46,47 |
| 5) 5,88% | 19) 8 meses e 13 dias |
| 6) R\$ 13,48 | 20) 5% a.m. |
| 7) 6,25% a.m. | 21) 2 meses e 1 dia |
| 8) R\$ 1.810,97 | 22) 2,22% a.m. |
| 9) 4,96% a.m. | 23) 8 meses e 10 dias |
| 10) 5% a.m. | 24) Lucro a vista: R\$ 13,60 |
| 11) R\$ 13.796,95 | Lucro a prazo: R\$ 5,20 |
| 12) R\$ 145.723,68 e R\$ 154.276,32 | 25) R\$ 50,00 e R\$ 150,00 |
| 13) 7,78% a.m. | 26) R\$ 5,12 |
| 14) 7,02% a.m. | 27) Nunca |
| 15) a) Banco "A": 5% a.m. | |
| Banco "B": 5,33% a.m. | |
| b) Banco "B": 4,822% a.m. | |
| Banco "A": 5,00% a.m. | |

• Série 2

- 1) Juros simples: $0,9136 \times N$
Desconto Comercial: $0,910 \times N$
- 2) a) R\$ 477,50
b) 3,14% a.m.
- 3) 3,33 % a.m.
- 4) 5 meses e 26 dias
- 5) R\$ 71.000,00 e R\$ 46.000,00
- 6) 3,06 % a.m.
- 7) 2 meses e 12 dias
- 8) R\$ 65.270,95 e R\$ 97.906,43
- 9) R\$ 123.165,00
- 10) 3,66 % a.m.
- 11) R\$ 147.252,75 e R\$ 294.505,50
- 12) 3,994% a.m.
- 13) R\$ 96.800,00
- 14) a) R\$ 732,60 e R\$ 817,00;
b) 1,899% a.m.
- 15) 8,33% a.m.
- 16) R\$ 49.192,56 e R\$ 98.385,12
- 17) a) 4 meses e 23 dias
b) Aquém de 4 meses e 23 dias
c) Além de 4 meses e 23 dias
- 18) 5 meses
- 19) 3,55% a.m.
- 20) Banco "X" : 60 meses
Banco "Y" : 62 meses
- 21) R\$ 46.468,40 e R\$ 65.055,76
- 22) 5,218% a.m.

• Série 3

- 1) R\$ 317,37
- 2) R\$ 209,93
- 3) 8,4472% a.m.
- 4) 11 meses e 16 dias
- 5) 9,44% a.m.
- 6) 10,55% a.m.
- 7) R\$ 332,78
- 8) a.m.
- 9) a) 246,307%
b) 10,906% a.m.
c) R\$ 158,96
- 10) 3,178% a.m.
- 11) 10,486% a.m.
- 12) 8,745% a.m.
- 13) 5 meses
- 14) R\$ 591,55
- 15) a) R\$ 934,80
b) R\$ 1.866,17
c) R\$ 65,20
d) 10,769% a.m.
- 16) a) 21,11% a.m.
b) 12,81% a.m.

• Série 4

- 1) 6,7911% a.m.
- 2) 58,687% ao semestre
- 3) a) 7,9348%
b) 10,2924%
c) 10,6682%
- d) 9,1393%
e) 10,25%
- 4) a) 21,7883%;
b) 34,1641%;
c) 25,2421%;
d) 31,4534%

- e) 22,5043%
- 5) a) 213,8428%
b) 213,8428%
c) 151,6170%
d) 193,9923%
- 6) a) 11,90% a.m.
b) 10,94% a.m.
- 7) 11,87% a.m.
- 8) R\$ 75.815,73
- 9) R\$ 5.129,78
- 10) R\$ 6.904,47
- 11) R\$ 102.248,23
- 12) R\$ 318.757,59
- 13) R\$ 906,11
- 14) 7,746% a.m.
- 15) R\$ 3.948,44
- 16) 10 meses e 25 dias

• Série 5

- 1) R\$ 287.798,00
- 2) R\$ 491,85
- 3) R\$ 2.340,43
- 4) 13 x R\$ 200,00, mais 1 de R\$ 183,64
- 5) R\$ 2.609,45
- 6) Preço à vista : Cz\$ 4.942,6222 OTNs
- 7) R\$ 115,51
- 8) 412,2608 OTNs
- 9) R\$ 22.567,18
- 10) 9,59%
- 11) R\$ 101,74
- 12) R\$ 149,67 e R\$ 299,33



cead^{UFV}

Coordenadoria de
Educação Aberta e a Distância