UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Apostila de Matemática Básica

Curso Técnico de Administração

Fernando de Souza Bastos
Guilherme Fernandes Castro de Oliveira

UFV
Universidade Federal de Viçosa

Sumário

PARTE I

The First Part

CAPÍTULO 1

Introdução

Olá, esta apostila foi em grande parte baseada em bons livros de matemática do primeiro e segundo grau os quais foram devidamente referenciados. Todos capítulos e seções foram adicionados com a intenção de ajuda-lo a entender um pouco de matemática básica e para incentiva-lo a continuar os estudos. Procuramos construir um texto objetivo e de fácil entendimento com bastante exercícios e muitos exemplos, esperamos que aproveitem. É sempre bom lembrar que para aprender matemática é necessário fazer muitos exercícios. Bons estudos!!!

CAPÍTULO 2

Conjuntos e Relações

2.1 Introdução

Conjunto é um conceito simples, porém fundamental em Matemática. Um conjunto é uma coleção ou agrupamento de elementos bem definidos. Em que, por bem definido entende-se que os elementos que compõe um conjunto são definidos de acordo com alguma regra que facilita sua identificação. Segue alguns exemplos de conjuntos:

Exemplo 1

a) Conjunto de dedos da nossa mão;

b) Conjunto dos números pares maiores que 2 e menores ou iguais a 10;

c) Conjunto de resultados possíveis no lançamento de uma moeda;

d) Conjunto de resultados possíveis no lançamento de um dado;

e) Conjunto de todos os meses do ano;

Cada membro ou objeto que faz parte do conjunto é chamado de elemento. Nos exemplos anteriores, temos os elementos:

Exemplo 2

a) Polegar, Indicador, Médio, Anelar, Mínimo;

b) 4,6,8,10;

c) Cara, Coroa;

d) 1,2,3,4,5,6;

e) Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio, Junho, Julho, Agosto, Setembro, Outubro, Novembro, Dezembro;

Iremos sempre indicar qualquer conjunto por letras maiúsculas e seus respectivos elementos por letras minúsculas. Para indicar que um objeto x é um membro de um conjunto A se escreve $x \in A$, enquanto que se x não pertence a A iremos indicar como $x \notin A$.

2.2 Representação de Conjuntos

Diagrama de Euler - Venn

Podemos representar um determinado conjunto usando pontos interiores a uma linha fechada ou círculo, tal representação é denominada diagrama de Euler-Venn. No entanto, a representação ao lado é bem limitada, uma vez que é impossível representar conjuntos infinitos ou conjuntos com um número grande de elementos com tais diagramas. Logo, descrevemos conjuntos por uma propriedade comum ou representamos os mesmos diretamente usando uma notação simples com chaves.

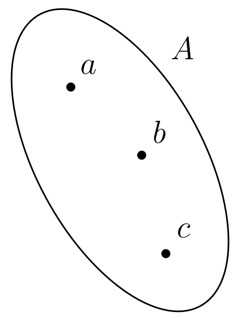


Figura 2.1: Diagrama de Euler-Venn

Descrição por uma Propriedade

Quando descrevemos um conjunto A por meio de uma propriedade característica P de seus elementos x, escrevemos

$$
\begin{aligned}
A =& \{x \ ; \ x \quad \text{tem a propriedade } P\} \\
A =& \{x \mid x \quad \text{tem a propriedade } P\} \\
A =& \{x : x \quad \text{tem a propriedade } P\}
\end{aligned}
$$

Observação

A leitura em português de qualquer das três representações anteriores é:

"A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P"

Exemplo 3

a) $A = \{x \mid x$ é par maior que 3 e menor que 11$\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

$$A = \{4, 6, 8, 10\};$$

b) $A = \{x \ ; \ x$ é Estado da região Sudeste do Brasil$\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

$$A = \{\text{Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro, São Paulo}\};$$

c) $A = \{x : x$ é impar e $0 < x \leq 7\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

$$A = \{1, 3, 5, 7\};$$

Descrição por Enumeração dos Elementos

Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos, devemos indicá-lo escrevendo seus elementos entre chaves.

Exemplo 4

a) Conjunto das vogais $\{a, e, i, o, u\}$;

b) Conjunto dos algarismos romanos $\{I, V, X, L, C, D, M\}$;

c) Conjunto dos meses de 31 dias {janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro};

Quando o conjunto é infinito ou finito com grande número de elementos também podemos usar chaves, porém, usamos reticências para dar a ideia de continuidade.

Exemplo 5

a) Conjunto dos números pares positivos

$$\{2, 4, 6, \cdots\};$$

b) Conjunto dos números primos positivos

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\};$$

c) Conjunto dos 108 primeiros números cujo nome começam com a letra d

$$\{2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, 200, 201, 202, \cdots, 299\};$$

2.3 Conjuntos Especiais

Conjunto Vazio

O conjunto vazio, denotado por { } ou $\emptyset$, é um conjunto sem elementos. Dizemos que possui tamanho ou cardinalidade zero. Podemos obter um conjunto vazio quando descrevemos um conjunto por meio de uma propriedade P logicamente falsa.

Exemplo 6

a) $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$;

b) $\{x \mid x > 9 \text{ e } x < 8\} = \{\ \}$;

c) $\{a \mid a \text{ é um numéro real e } a^2 + 1 = 0\} = \emptyset$;

Conjunto Unitário

Dizemos que um conjunto é unitário, quando ele possui um único elemento.

Exemplo 7

a) $\{x \mid x \text{ é inteiro e } 0 < x \leq 1\} = \{1\}$;

b) O conjunto das soluções reais e positivas de $x^2 - 4 = 0$ é o conjunto dado por $\{2\}$;

c) O conjunto de meses que possui no máximo 29 dias é o conjunto dado por $\{\text{fevereiro}\}$;

Conjunto Universo

Denotamos por U o conjunto que contém todos os elementos de interesse para um determinado problema. Assim, se procuramos as soluções reais de uma equação, nosso conjunto universo é conjunto dos números reais, representado por $\mathbb{R}$, se estamos resolvendo um problema cuja solução vai ser um número inteiro, nosso conjunto universo é o conjunto dos números inteiros, representado por $\mathbb{Z}$, se estamos resolvendo um problema de Geometria Plana, nosso conjunto universo e um certo plano α.

Conjuntos Iguais

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais quando todos os elementos de A pertencem a B e, reciprocamente, todos os elementos de B pertencem a A. Na definição de igualdade entre conjuntos não há relação de ordem entre os elementos, assim,

$$\{a, b, c, d\} = \{c, d, a, b\} = \{a, d, b, c\}.$$

Além disso, são iguais também os conjuntos

$$\{a, b, c, d\} = \{c, c, c, d, a, b, b\} = \{a, a, d, d, b, c\},$$

ou seja, a repetição de um elemento na descrição de um conjunto é inútil e, portanto, podemos usar sempre a notação mais simples. É fato que, $A \neq B$, isto é, A é diferente de B, se existe algum elemento de A que não pertence a B ou se existe algum elemento em B que não pertence a A, por exemplo,

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, a\}.$$

Exemplo 8

a) $\{a, b, c, d\} = \{c, d, a, b\}$;

b) $\{x \mid x \text{é inteiro, positivo e ímpar}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$;

c) $\{x \mid 3x - 1 = 0\} = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$;

d) $\{x \mid x > 0\} \neq \{x \mid x < 0\}$;

Subconjuntos

Dizemos que um conjunto A é subconjunto de um conjunto B e denotamos $A \subset B$ se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B. Nesse caso podemos dizer também que A está contido em B ou que A é parte de B. O Simbolo $\subset$ é denominado *sinal de inclusão.*

Exemplo 9

a) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$;

b) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, a\}$;

c) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

d) $\{x \mid x \text{ é um número impar e } 0 < x < 5\} \subset \{0, 1, 3, 5\}$;

Se $A \subset B$, também podemos escrever $B \supset A$, que se lê "B contém A". Quando A não está contido em B, isto é, quando existe pelo menos um elemento em A que não pertence a B podemos escrever $A \not\subset B$, nesse caso temos a negação de $A \subset B$.

Exemplo 10

a) $\{a, b, c\} \not\subset \{a, b\}$;

b) $\{1, 2, 3, 4, 5, a\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

c) $\{0, 1, 3, 5\} \not\subset \{x \mid x \text{ é um número impar, } 0 < x < 5\}$;

Observação

Notemos que $A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Conjunto das Partes

Dado um conjunto A, chamamos de conjunto das partes do conjunto A, o conjunto $\mathcal{P}(A)$ que é formado por todos os subconjuntos X de A, isto é,

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Exemplo 11

a) Se $A = \{a\}$, os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\emptyset$ e o conjunto $\{a\}$, isto é,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\} = \{\emptyset, \{a\}\};$$

b) Se $A = \{a, b\}$ os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$, isto é,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\};$$

União de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se união de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B. Denotamos tal conjunto por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Lemos $A \cup B$ como "União entre A e B".

Exemplo 12

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

b) $\{a, b, c\} \cup \{d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$;

c) {janeiro, fevereiro, março} $\cup$ {abril, maio} = {janeiro, fevereiro, março, abril, maio};

Interseção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, denominamos interseção de A e B, o conjunto formado pelos elementos que pertencem, simultaneamente, a A e a B, e representamos por

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Lemos $A \cap B$ como “A interseção B."

Exemplo 13

a) $\{a, b, c\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, b\}$;

b) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5\}$;

c) $\{x \mid x \text{ é um número par}\} \cap \{x \mid x \text{ é um número ímpar}\} = \emptyset$;

d) {janeiro, fevereiro, março, abril, maio} $\cap$ {fevereiro, maio} = {fevereiro, maio};

Propriedades da interseção:

1) $A \cap A = A$;

2) $A \cap B = B \cap A$;

3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Observação:

Dizemos que dois conjuntos são disjuntos quando A e B não possuem elementos em comum, isto é, quando $A \cap B = \emptyset$.

Diferença de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B, isto é,

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplo 14

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4\} = \{1, 3, 5\}$;

b) $\{a, b, c, d, e, f\} - \{c, d, e\} = \{a, b, f\}$;

c) {janeiro, fevereiro, março, abril} − {abril, maio, junho} = {janeiro, fevereiro, março};

d) {atlético, cruzeiro, csa, flamengo} − {cruzeiro, csa} = {atlético, flamengo};

Complementar de B em A

Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se complementar de B em relação a A o conjunto $A - B$, ou seja, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. Representamos o complementar de B em relação a A por

$$\complement_A^B = A - B$$

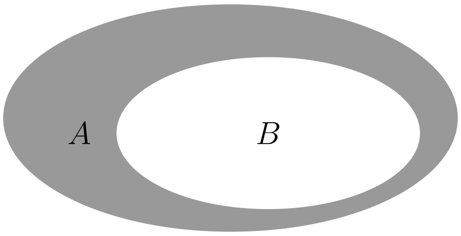


Figura 2.2: $\complement_A^B = A - B$

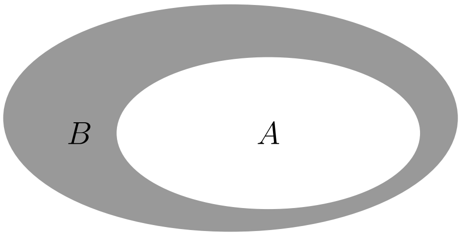


Figura 2.3: $\complement_B^A = B - A$

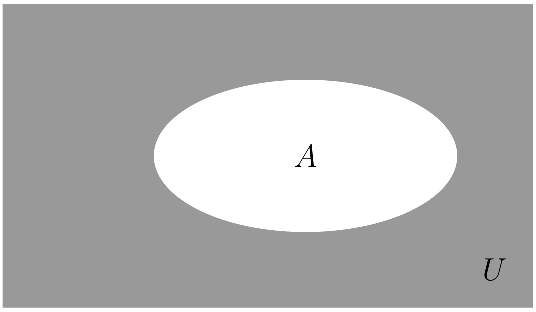


Figura 2.4: $\complement_U^A = U - A$

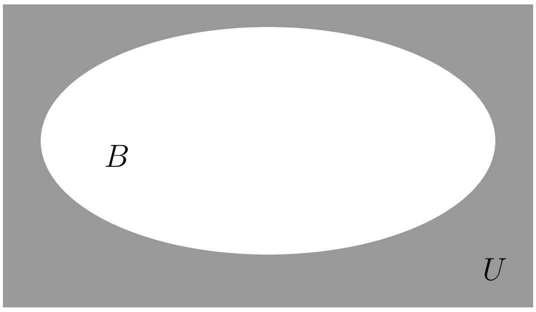


Figura 2.5: $\complement_U^B = U - B$

Exemplo 15

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{1, 3, 5\},\ \complement_A^B = A - B = \{2, 4\};$

b) $A = \{2, 3, 5\},\ B = \{2, 3, 5, 7, 11\},\ \complement_B^A = B - A = \{7, 11\};$

c) $A = \{a, b, c, d\},\ B = \{a, b, c, d\},\ \complement_B^A = B - A = \emptyset;$

2.4 Conjuntos Numéricos

O ensino de matemática inicia-se na infância com operações básicas, processos de contagem simples e problemas de aritmética. Somente a partir do sexto ano do Ensino Fundamental iniciamos o estudo de Álgebra. No início aprendemos a definição de conjuntos e suas relações básicas, em seguida, estudamos alguns conjuntos numéricos, tais como o conjunto dos números Naturais, o conjunto dos números Inteiros, os Racionais e já no sétimo e oitavo ano do Ensino Básico estudamos o conjunto dos números Irracionais e dos Reais. Veremos a partir de agora, alguns fundamentos básicos desses conjuntos.

Conjuntos dos Números Naturais

Chama-se conjunto dos números naturais e representa-se por $\mathbb{N}$ o conjunto formado por $0, 1, 2, 3, \cdots$. Ou seja,

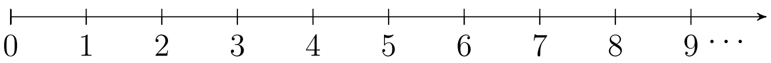
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

Vamos considerar nesse material que o conjunto dos naturais começam a partir do número 0 (zero). Essa é quase uma convenção em livros e apostilas do Ensino Fundamental e Médio. No entanto, Existem diversos autores que não consideram o zero como um número natural, principalmente em livros avançados de matemática pura.

Quando nos referimos ao conjunto dos números inteiros positivos, queremos indicar o conjunto

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

Os conjuntos numéricos podem ser representados graficamente por meio de retas. Na figura abaixo podemos visualizar a representação do conjunto dos números naturais.



Observamos que a extremidade esquerda começa no número 0, a partir daí são marcados os demais números de um em um. Essa reta não está completa, pois não existe nenhum número natural entre 0 e 1. Também não há número natural entre 1 e 2 ou entre 2 e 3, e etc. Logo, vamos continuar estudando conjuntos numéricos até que possamos cobrir toda a reta com números.

Conjuntos dos Números Inteiros

Chama-se conjunto dos números inteiros e representa-se por $\mathbb{Z}$ o conjunto formado por

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

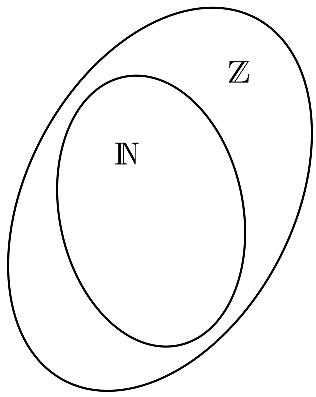
Ou seja,

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

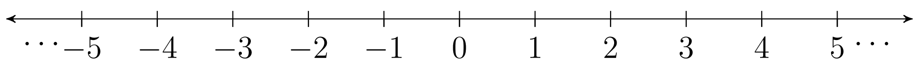
O conjunto dos números inteiros é uma ampliação do conjunto dos naturais. Pois além de conter todo o conjunto dos naturais, os inteiros contém também o negativo de todo número natural. Assim, para cada inteiro positivo, existe um número inteiro negativo. Portanto, podemos usar a inclusão para representar a relação entre os dois conjuntos da seguinte forma:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Podemos também considerar o diagrama de Euler-Venn para representar a mesma inclusão, tal como:



Números inteiros também podem ser representados em uma reta numérica. A diferença é que essa reta se estende ao infinito, nos dois sentidos. O número zero deve ser sempre representado na reta, à sua esquerda ficam os números negativos, e à sua direita os números positivos.



Conjuntos dos Números Racionais

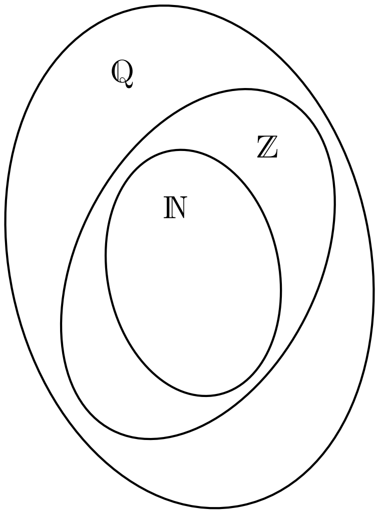
Chama-se conjunto dos números racionais e representa-se por $\mathbb{Q}$ o conjunto formado por números do tipo $\frac{a}{b}$, em que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Ou seja,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Os números racionais constituem um sistema extremamente útil. Podemos adicionar, multiplicar, subtrair e dividir números racionais (exceto dividir por 0) e manter-se dentro do conjunto de números racionais. Além disso, os números racionais são suficientes para todas as medidas físicas reais, tais como comprimento e largura, com qualquer exatidão desejada.

No entanto, existem ainda outros conjuntos que contém números que não podem ser representados pelo quociente $\frac{a}{b}, b \neq 0$.

Usando o diagrama de Euler-Venn podemos representar o conjunto dos Racionais como:



Conjuntos dos Números Irracionais

Existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Por exemplo, o número

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510\cdots$$

não é racional, ele representa um número irracional. Outros exemplos são:

a) $1,23023002300023000023\cdots$

b) $\sqrt{2} = 1,41421356237$

c) $e = 2,718281828459045235360287\cdots$

O conjunto dos números irracionais denotado por $\mathbb{I}$ é formado por todos os números que não podem sem representados pela forma $\dfrac{a}{b}$.

Não é o foco deste material demonstrações complicadas. No entanto, a demonstração de que a raiz quadrada de 2 não é racional é extremamente fácil e deveria ser experimentada por toda pessoa com certo grau de instrução. Assim, para o seu enriquecimento, apresentamos abaixo essa demonstração.

O que segue é uma demonstração por contradição. Iniciaremos supondo que exista um número racional cujo quadrado seja igual a 2. Com essa suposição, vamos chegar a uma contradição. Assim, concluiremos que nossa suposição estava incorreta e que, portanto, não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2. Compreender o padrão lógico de pensamento utilizado nessa demonstração pode ser um recurso valioso para lidar com questões complexas.

Suponha que existam números inteiros a e b tais que

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2. \tag{2.1}$$

Podemos escolher a e b de forma que não tenhamos nenhum fator comum entre eles. Ou seja, não é possível simplificar $\frac{a}{b}$. A partir daí, notem que (2.1) pode ser escrita como

$$a^2 = 2b^2. \tag{2.2}$$

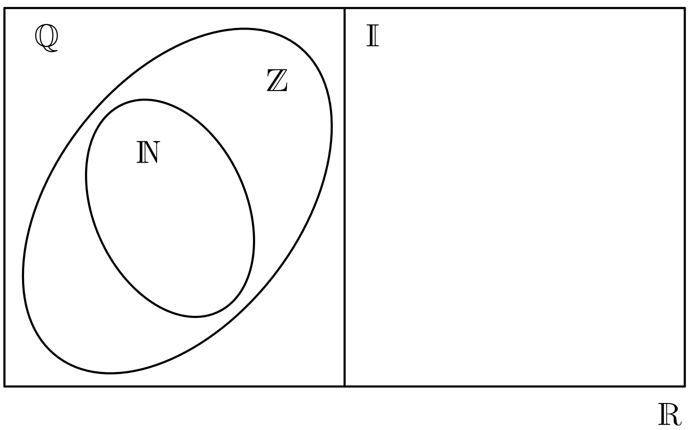
Isso implica que a^2 seja par; Logo, a é par. Assim, existe um número inteiro k tal que $a = 2k$. Se substituirmos $a = 2k$ na equação (2.2), obtemos:

$$4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2. \tag{2.3}$$

Isso implica que b^2 é par e, portanto, b é par. Mas se a é par e b é par, então eles possuem fator comum, contradizendo nossa escolha inicial. Tal contradição significa que nossa suposição inicial, de que existiria um número racional cujo quadrado fosse igual a 2, esta incorreta. Assim, não existem inteiros a e b tais que $\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{2}$. Como queríamos demonstrar.

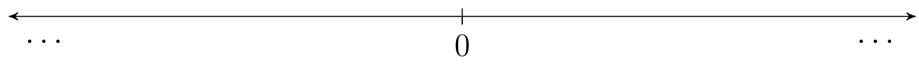
Conjuntos dos Números Reais

O conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$ é formado pela união entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, ou seja, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são disjuntos, isto é, não possuem elementos em comum. Nesse sentido, também não tem relação com o conjunto dos números irracionais os conjuntos dos naturais e inteiros, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Assim, a representação via diagrama de Euler-venn pode ser feita como:



Dizemos que o conjunto dos reais é denso, isso na prática significa que entre quaisquer dois números reais, sempre existe um número real diferente dos dois iniciais. Por exemplo, dado dois números reais distintos a e b, a média entre esses dois números é também um número real que está entre a e b. Na verdade, existem infinitos números reais entre quaisquer dois números reais, por menor que seja a distância entre eles. Dessa forma, o conjunto dos números reais é sempre bem representado pela reta real. Na reta real, os números estão sempre ordenados. Isso significa que fixado $x \in \mathbb{R}$ sob a reta, um número a a esquerda de x é sempre menor que x e, se a está a direita de x, então a é maior do que x.

Representamos o conjunto dos números reais por meio de uma reta como abaixo, lembrem-se de sempre marcarem a origem. As setas a esquerda e a direita indicam que a reta cresce para ambos os lados.



2.5 Intervalos

Dados dois números reais a e b, com $a < b$, definimos:

a) intervalo aberto de extremos a e b o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$$

b) intervalo fechado de extremos a e b o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$$

c) intervalo fechado à esquerda (ou aberto a direita) de extremos a e b o conjunto

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$$

d) intervalo aberto à esquerda (ou fechado a direita) de extremos a e b o conjunto

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$

Em qualquer um destes intervalos os números a e b são denominados, respectivamente, extremo inferior e extremo superior do intervalo.

Exemplo 16

a) $(0, 9) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 9\}$;

b) $(1, 7] = \{x \in \mathbb{R};\ 1 < x \leq 7\}$;

c) $[10, 20) = \{x \in \mathbb{R};\ 10 \leq x < 20\}$;

d) $[-5, 5] = \{x \in \mathbb{R};\ -5 \leq x \leq 5\}$;

Podemos ainda representar intervalos infinitos usando a notação de conjuntos, tais como:

a) intervalo formado por todos os valores reais menores ou iguais ao número real b

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$$

b) intervalo formado por todos os valores reais menores que o número real b

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$$

c) intervalo formado por todos os valores reais maiores ou iguais ao número real a

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$$

d) intervalo formado por todos os valores reais maiores que o número real a

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$$

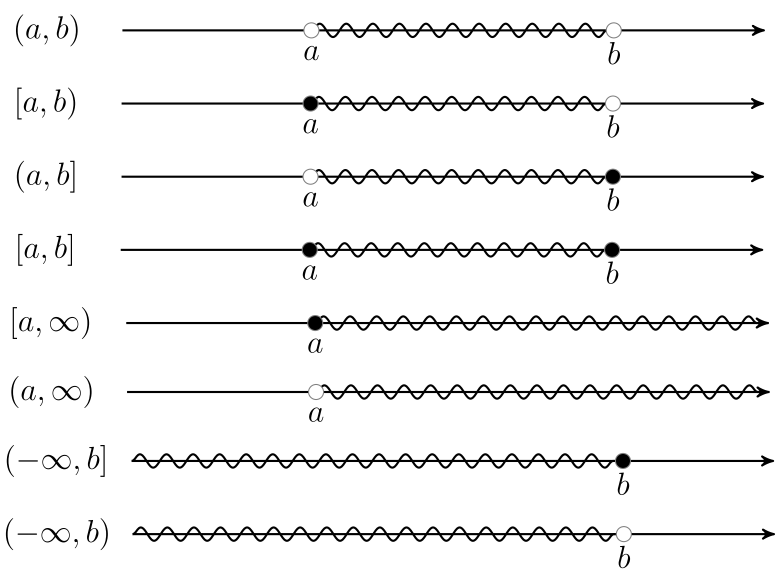
Exemplo 17

a) $(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$;

b) $(-\infty, 10] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 10\}$;

c) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$;

Ou podemos usar uma representação gráfica, uma vez que os intervalos possuem uma representação geométrica sobre a reta real, tais como:



2.6 Exercícios

1. Descreva na forma de conjunto:

   a) Dias da semana
   b) Vogais
   c) Naipes das cartas de um baralho
   d) Nomes de meses de 30 dias
   e) Nomes dos estados brasileiros
   f) Algarismos romanos
   g) Cores de um semáforo

2. Descreva os elementos dos seguintes conjuntos:

   a) $A = \{x \mid x \text{ é nome de estado que começa com a letra M}\}$
   b) $B = \{x \mid x \text{ é cor da bandeira de Minas Gerais}\}$
   c) $C = \{x \mid x \text{ é letra da palavra paralelpípedo}\}$
   d) $D = \{x \mid x \text{ é letra do alfabeto}\}$
   e) $E = \{x \mid x \text{ é nome das capitais dos estados brasileiros}\}$
   f) $F = \{x \mid x \text{ é nome dos planetas do sistema solar}\}$
   g) $G = \{x \mid x \text{ é um número entre 0 e 9}\}$

3. Use um Diagrama de Venn para representar os conjuntos:

   a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
   b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$
   c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
   d) $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   e) $E = \{2x \mid x \in D\}$
   f) $F = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
   g) $G = \left\{\frac{1}{2} \cdot x \mid x \in F\right\}$

4. Descreva por meio de uma propriedade:

   a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$
   b) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots\}$
   c) $C = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$
   d) $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   e) $E = \{\text{fevereiro}\}$
   f) $F = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, \cdots\}$
   g) $G = \{\text{verde, amarelo, azul, branco}\}$

5. Descreva por meio de uma propriedade:

   a) O conjunto dos múltiplos inteiros de 4 até 30
   b) O conjunto dos divisores inteiros de 36
   c) O conjunto dos múltiplos inteiros de 0
   d) O conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 1 e 4
   e) O conjunto das capitais da região sudeste do Brasil
   f) O conjunto números de 0 a 9
   g) O conjunto das capitais do continente da América do Sul
   h) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   i) $B = \{-6, -1, 4, 9, 14, 19\}$
   j) $C = \{1, 11, 21, 31, 41, \cdots\}$
   k) $D = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \cdots\}$
   l) $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
   m) $F = \{\text{Lua}\}$
   n) $G = \{3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$

6. Qual dos conjuntos abaixo é unitário?

   a) $A = \{x \mid x \text{ é um inteiro positivo e } 3 < x < 8\}$
   b) $B = \{x \mid 3x + 1 = 4\}$
   c) $C = \{x \mid 0 \cdot x = 0\}$
   d) $D = \{x \mid x \text{ é letra do alfabeto}\}$

7. Qual dos conjuntos abaixo é vazio?

   a) $A = \{x \mid x,\ 5 < x < 7\}$
   b) $B = \{x \mid x \text{ é inteiro } x^2 = 2\}$
   c) $C = \{x \mid x^3 = x\}$
   d) $D = \{x \mid x \text{ é divisível por } 2\}$

8. Qual dos conjuntos abaixo a igualdade é verdadeira?

   a) {a, b, c, d} = {c, b, a, c, b, f, d, e}
   b) $\{1, 2, 5, 7\} = \{2, 1, 3, 5, 7, 9\}$
   c) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\} = \{x \mid x \text{ é inteiro, positivo e par}\}$
   d) $\{x \mid 4x + 3 = 27\} = \{5\}$

9. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$, use $\in, \notin, \subset, \not\subset$, $=$, $\cap$ para representar as seguintes relações:

    a) 2 é elemento de A
    b) 3 não está em B
    c) B é subconjunto de A
    d) A é igual a B
    e) 0 está em A e em B
    f) 1 ésta em B

10. Qual dos conjuntos abaixo é um subconjunto de S=$\{x \mid x$ é um inteiro, negativo par$\}$

    a) A = {10, 8, 20, 24, 100}
    b) B = $\{x \mid 3x + 2 = 5\}$
    c) C = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16}
    d) D = {-2, -6, -10, -20, -26}

11. Seja os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 4\}, C = \{0, 2, 4\}, D = \{1, 3, 5\}$, classifique as sentenças abaixo em verdadeiro ou falso:

    a) ( ) $D \subset A$
    b) ( ) $A \supset B$
    c) ( ) $B \subset D$
    d) ( ) $C \neq D$
    e) ( ) $B \not\subset C$
    f) ( ) $A \supset B$

12. Descreva o conjunto união dos conjuntos abaixo:

    a) A = $\{x \mid x$ é um inteiro ímpar$\}$, B = $\{x \mid x$ é um inteiro par$\}$
    b) A = {a, b, c, d, e}, B = {a, b, f, g, h}
    c) A = $\{x \mid 3 < x \leq 7\}$, B = $\{x \mid 7 < x \leq 12\}$, C = $\{x \mid 12 \leq x < 25\}$
    d) A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4, 6, 8, 10}, C = {-5, -4, -3, -2, -1}

13. Descreva o conjunto interseção dos conjuntos abaixo:

    a) A = {a, b, c, d}, B = {a, b}
    b) A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4}
    c) A = {x, y, w, z, 1, 2, 3}, B = {1, 2, 3}, C = {x, y, 1, 2, 3}
    d) A = $\{x \mid 2 < x < 10\}$, B = $\{x \mid 5 < x < 12\}$, C = $\{x \mid x < 7\}$

14. Dado os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, escreva os conjuntos abaixo:
    a) $A \cup B$
    b) $C - A$
    c) $C - B$
    d) $A - B$
    e) $C \cap B$
    f) $C \cap A$

15. Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ escreva matematicamente as seguintes sentenças:
    a) 5 é elemento de A
    b) 2 não está em B
    c) B é parte de A
    d) B é igual a A
    e) 4 é elemento de B

16. Dado os conjuntos $A = \{10, 11\}$, $B = \{12, 13\}$, $C = \{10, 12, 13\}$ e $D = \{10, 11, 12, 13\}$ classique em V ou F as sentenças abaixo.
    a) ( ) $A \cup B = D$
    b) ( ) $A = C$
    c) ( ) $B \cup C = D$
    d) ( ) $D - C = A$
    e) ( ) $A \subset C$
    f) ( ) $B \subset D$
    g) ( ) $C \not\subset D$

17. Quais os valores que x, y e z devem assumir para que os conjuntos $A = \{9, 3, 7, 2, 1\}$ e $B = \{x, 7, y, 3, z\}$ sejam iguais?

18. Desenhe em uma reta cada conjunto numérico abaixo:
    a) $\{x > 5 \mid x \in \mathbb{N}\}$
    b) $\{x < 2 \mid x \in \mathbb{N}\}$
    c) $\{x < 4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
    d) $\{3 \leq x < 7 \mid x \in \mathbb{R}\}$
    e) $\{x \leq -2 \ \cup \ x > 0 \mid \ x \in \mathbb{R}\}$
    f) $\{x > 1 \ \cap \ x \leq 6 \mid x \in \mathbb{R}\}$

19. Assinale com V ou F.

a) ( ) $0 \in \mathbb{N}$

b) ( ) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

c) ( ) $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \in \mathbb{N}$

d) ( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}$

e) ( ) $(-1)^2 \in \mathbb{Z}_-$

f) ( ) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$

g) ( ) $0 \in \mathbb{Z}^*$

h) ( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

i) ( ) $0 \in \mathbb{Q}$

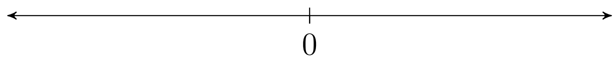
j) ( ) $\frac{24}{16}$ é irredutível.

k) ( ) $0,595959595959... \in \mathbb{Q}$

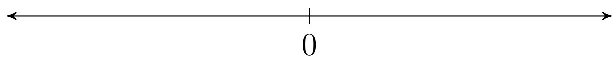
l) ( ) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

20. Represente na reta real os intervalos abaixo:

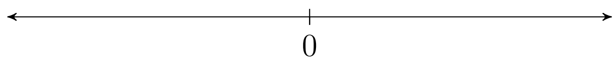
a) $(2, 8]$



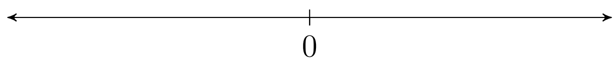
b) $[-3, -7]$



c) $[5, +\infty)$

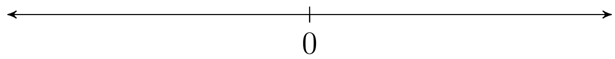


d) $(-\infty, -4) \cup [0, 2) \cup (6, +\infty)$

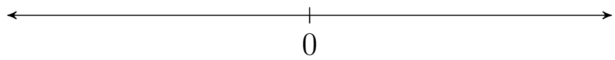


21. Sabendo dos conjuntos $A = [-1, 2]$ e $B = [0, 5]$ desenhe na reta real o que é pedido:

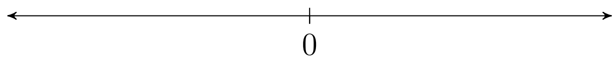
    a) A



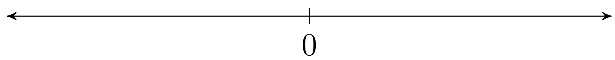
    b) B



    c) $A \cup B$



    d) $A \cap B$



22. Descreva conforme a teoria de conjuntos os seguintes intervalos:

    a) $[3, +\infty)$

    b) $(-3, 14]$

    c) $(-\infty, +\infty)$

    d) $[0, 9]$

23. Descreva os seguintes conjuntos:

    a) $[4, 7] \cap [5, 10]$
    b) $[1, 5] \cap [2, 6[$
    c) $]-\infty, 3] \cap [0, +\infty[$
    d) $[-2, \frac{3}{2}] \cap [0, 5] \cap [-5, +\infty[$

24. Determine:

    a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$
    b) $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$
    c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
    d) $(\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}) \cap \mathbb{Z}$

25. Defina o intervalo e represente na reta real os seguintes conjuntos:

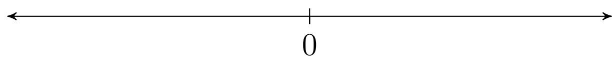
    a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 9\}$
    b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 5\}$
    c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \text{ ou } x \geq 7\}$
    d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -10\}$
    e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

26. De acordo com os conjuntos do exercício anterior escreva os conjuntos:

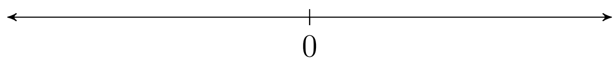
    a) $A \cap B$
    b) $C \cup E$
    c) $D \cap B \cap C$
    d) $D \cup E \cap A$
    e) $A \cap B \cup C$

27. Represente na reta real os conjuntos do exercício anterior.

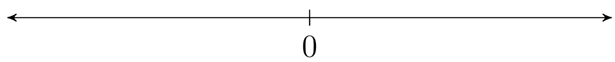
    a) $A \cap B$



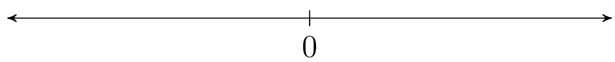
    b) $C \cup E$



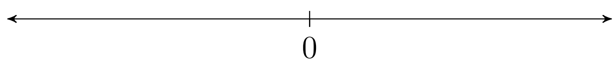
    c) $D \cap B \cap C$



    d) $D \cup E \cap A$



    e) $A \cap B \cup C$



CAPÍTULO 3

Potenciação e Radiciação

Dados um número real a e um número natural n, com $n > 1$, chamamos de potência de base a e expoente n o número a^n, que é o produto de n fatores iguais a a. Decorre dessa definição, que:

$$a^n = \underbrace{a.a.a \cdots a}_{n \text{ fatores}}$$

Além disso, assumimos que, se $a \neq 0$, $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.

Exemplo 1

a) $(-3)^0 = 1$;

b) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$;

c) $\left(\dfrac{3}{17}\right)^1 = \left(\dfrac{3}{17}\right)$;

d) $x^2 = x \cdot x$;

Dados um número real $a \neq 0$ e um número natural n, com $n > 1$, chamamos de potência de base a e expoente $-n$ o número a^{-n}, que é o inverso de a^n. Decorre dessa definição, que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriedades básicas:

i) $a^m a^n = a^{m+n}$;

ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$;

iii) $(a.b)^n = a^n b^n$;

iv) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$;

v) $(a^m)^n = a^{mn}$;

3.1 Raiz Enésima Aritmética

Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural n, sempre existe um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$. O número b é denominado raiz enésima aritmética de a e indicaremos pe1o símbolo $\sqrt[n]{a}$ em que a é chamado radicando e n é o índice.

Decorre da definição que $(\sqrt[n]{a^n}) = a$, para todo $a \geq 0$. É importante ressaltar que se n é par, então $\sqrt[n]{a} = |a|$, para qualquer real a. Em que $|a|$ representa o valor absoluto de a e é definido por

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Propriedades:

Se $a, b \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos:

i) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$;

ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;

iii) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0$;

iv) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;

v) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$;

vi) $b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}$.

Potência de Expoente Racional

Dados um número real positivo a, um número inteiro p e um número natural q $(q \geq 1)$, chama-se de potência de base a e expoente $\dfrac{p}{q}$ a raiz com índice q de a^p, ou seja

$$a > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0,\ \text{sendo } \frac{p}{q} > 0,\ \text{define-se } 0^{\frac{p}{q}} = 0.$$

Exemplo 2

a) $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{8}$

b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

c) $4^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{256}$

d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, temos então:

i) $a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$;

ii) $\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$;

iii) $(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}$;

iv) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$;

v) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\frac{r}{s}}$

Exemplo 3

a) Como resolver $\sqrt{36}$:

Primeiramente precisamos fazer uma decomposição em números primos do radicando, como abaixo:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 \end{array}$$

Agora substituindo o radicando por sua versão fatorada conseguimos obter o resultado da radiciação, da seguinte forma:

$$\sqrt{36} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2} = 2^{\frac{2}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{2}} = 2^1 \cdot 3^1 = 6;$$

b) Como resolver $\sqrt[3]{24}$:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2^{\frac{3}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{3}$$

Nem sempre conseguimos obter um resultado sem radiciação.

3.2 Exercícios

1. Resolva as potências abaixo:

   a) 5^2
   b) -5^2
   c) $(-5)^2$
   d) 3^3
   e) 6^2
   f) 0^5
   g) 10^2
   h) 10^3
   i) 10^4
   j) 1^7
   k) 359^1
   l) 32^2
   m) 13^3
   n) 12^3
   o) 2^4
   p) 2^7
   q) $(-1)^6$
   r) -2^4
   s) $(-4)^3$
   t) -10^6
   u) 7^4
   v) 2^6
   w) 3^5
   x) 27^2
   y) 24^3
   z) 16^2

2. Reduza a uma potência.

   a) $2^3 \cdot 2^4$
   b) $7^2 \cdot 7^{-1}$
   c) $4^0 \cdot 4^0$
   d) $4 \cdot 4 \cdot 4$
   e) $5^5 \cdot 5$
   f) $a \cdot a$
   g) $\dfrac{8^3}{8}$
   h) $\dfrac{2}{2}$
   i) $\dfrac{a^3}{a}$
   j) $g^2 \cdot g^3 \cdot g^{-4}$
   k) $[(-3^2)^2]$
   l) $[(x^5)^7]^{-3}$
   m) $\frac{4}{16}$
   n) $7^2 \cdot 7^4 \cdot 7^{-3}$
   o) $\dfrac{8^2 \cdot (9-5)^2}{(13-11)^3}$

3. Simplifique:

   a) $(x^7 \cdot x^3)^4$
   b) $(x^2 \cdot x^5)$
   c) $\left(\dfrac{x^6}{x^2}\right)^2$
   d) $\left[(x^2 \cdot x)^3\right]^4$
   e) $(x^{-2} \cdot x)^{-1}$
   f) $\dfrac{x \cdot x^2 \cdot x^3}{x^2 \cdot x}$
   g) $\left(\dfrac{x^3 \cdot x \cdot x^6}{x^4 \cdot x^{11}}\right)^2$

4. Dadas as expressões $A:\ 3x^3 - 4x = 16$ e $B:\ 4x^4 - 4x^2 + x^{-1} = 1$ qual das preposições é verdadeira para os valores de x :

   a) $A:\ x = 2,\ B:\ x = 2$
   b) $A:\ x = 2,\ B:\ x = 1$
   c) $A:\ x = 1,\ B:\ x = 2$
   d) $A:\ x = -1,\ B:\ x = 0$
   e) $A:\ x = 1,\ B:\ x = 1$

5. Resolva $p(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x$ para os diferentes valores de x :

   a) $x = 0;$
   b) $x = 1;$
   c) $x = 2;$
   d) $x = 3;$
   e) $x = -1;$
   f) $x = -2;$
   g) $x = -3;$
   h) $x = 4;$
   i) $x = 5;$
   j) $x = 6;$
   k) $x = -4;$
   l) $x = -5;$
   m) $x = -6;$

6. (UFLA-MG) O valor da expressão $\dfrac{10^{\frac{n}{2}}(10^{m-1} + 10^{m+1})}{10^m(10^{\frac{n}{2}} + 10^{2+\frac{n}{2}})}$ é:

   a) 1
   b) 10
   c) $10^{m\cdot\frac{n}{2}-2}$
   d) $10^{m\cdot\frac{n}{2}+2}$
   e) 10^{-1}

7. (UFMG) Uma fazenda tem uma área de $0,4\text{km}^2$. Suponha que essa fazenda seja um quadrado, cujo lado mede ℓ metros. O número ℓ satisfaz a condição:

   a) $180 < \ell < 210$
   b) $210 < \ell < 250$
   c) $400 < \ell < 500$
   d) $600 < \ell < 700$

8. (UFV-MG) A expressão $\dfrac{7}{\sqrt{7+a} - \sqrt{a}}$, em que a é um número real positivo, equivale a:

   a) 7
   b) $\sqrt{7+a} + \sqrt{a}$
   c) $\sqrt{7}$
   d) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$
   e) 1

9. (UFMG) O valor de $m = (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2})$ é:

   a) 6
   b) $6\sqrt{6}$
   c) 16
   d) 18
   e) $12\sqrt{5}$

10. (PUC-MG) O valor da expressão $y = 8 \cdot \sqrt[3]{10^{-3}} \cdot 5 \cdot 10^{-3}$ é:

    a) 40
    b) $40 \cdot 10^2$
    c) 40^{-2}
    d) $4 \cdot 10^{-3}$
    e) $40 \cdot 10^{-3}$

11. (FUVEST-SP) Qual desses números é igual a $0,064$?

    a) $\left(\frac{1}{80}\right)^2$
    b) $\left(\frac{1}{8}\right)^2$
    c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$
    d) $\left(\frac{1}{800}\right)^2$
    e) $\left(\frac{8}{10}\right)^3$

12. (UNIFEI-MG) Sejam $A = \sqrt{\frac{x}{y}}, B = \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}\ C = \sqrt[6]{\frac{x}{y}}$. Então, o produto $A \cdot B \cdot C$ é igual a?

    a) $\sqrt[3]{y}$
    b) $\sqrt[3]{x}$
    c) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$
    d) $\sqrt[3]{xy}$

13. (UFPel-RS) O valor da expressão $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{0,5} \div \left(\dfrac{1}{32}\right)^{0,2}$ é:

    a) $0,125$
    b) $0,25$
    c) $0,5$
    d) $0,75$
    e) 1

14. (Cesgranrio) Um número real x, que satisfaz $\sqrt{35} < x < \sqrt{39}$, é:

    a) $5,7$
    b) $5,8$
    c) 6
    d) $6,3$

15. (UEL-PR) Seja $M = \left[\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2}\right]^{1,5} \cdot (0,6)^{-2}$. Efetuando-se as operações, tem-se que

    a) $M < -\dfrac{5}{3}$
    b) $-1 < M < 0$
    c) $0 < M < \dfrac{1}{3}$
    d) $\dfrac{1}{2} < M < \dfrac{4}{5}$

16. (PUC-Campinas-SP) Efetuando-se a expressão adiante, $\sqrt[3]{\dfrac{14}{125} + \sqrt{\dfrac{3}{5} - \dfrac{11}{25}}}$ obtém-se:

    a) $\dfrac{\sqrt[3]{14}+2}{5}$
    b) $\sqrt[3]{\dfrac{114}{5}}$
    c) $\dfrac{6}{5}$
    d) $\dfrac{4}{5}$
    e) $\dfrac{3}{5}$

17. (PUC-RJ) Seja $a = 12(\sqrt{2}-1),\ b = 4\sqrt{2}$ e $c = 3\sqrt{3}$, então

    a) $a < c < b$
    b) $c < a < b$
    c) $a < b < c$
    d) $b < c < a$
    e) $b < a < c$

18. (FUVEST-SP) O menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo é:

    a) 37
    b) 36
    c) 35
    d) 34
    e) 33

19. (ENEM 2010) Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

    Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas Veja (ed. 2055), Claudia (ed. 555), National Geographic (ed. 93) e Nova Escola (ed. 208) (Adaptação).

    Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consomem 1000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

    a) 10^2
    b) 10^3
    c) 10^4
    d) 10^5
    e) 10^9

20. (ENEM 2009) No depósito de uma biblioteca há caixas contendo folhas de papel de $0,1\ mm$ de espessura, e em cada uma delas estão anotados 10 títulos de livros diferentes. Essas folhas foram empilhadas formando uma torre vertical de 1 m de altura. Qual a representação, em potência de 10, correspondente à quantidade de títulos de livros registrados nesse empilhamento?

    a) 10^2
    b) 10^4
    c) 10^5
    d) 10^6
    e) 10^7

CAPÍTULO 4

Produtos Notáveis

Produtos notáveis nada mais são do que identidades práticas e frequentes nos cálculos algébricos, as principais são:

Quadrado da soma de dois termos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Quadrado da diferença de dois termos: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Produto da soma pela diferença de dois termos: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Cubo da soma de dois termos: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Cubo da diferença de dois termos: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemplo de aplicação de produtos notáveis

Uma bela história contada por muitos professores de matemática refere-se a chamada soma de Gaus. Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) foi um grande matemático que começou a demonstrar sua genialidade desde criança. De acordo com a história, um certo dia, um professor cansado de dar aula resolveu passar um exercício para sua turma de alunos menores de 10 anos que tomasse bastante tempo para a resolução. Ele então pediu aos seus alunos que fizessem a soma de todos os números naturais entre 1 e 100. Em seguida, tranquilamente se dirigiu a sua mesa para descansar. Surpreendentemente, Gauss, um de seus alunos concluiu a atividade em poucos minutos. Ao conferir os resultados, o professor verificou que Gauss havia acertado a resposta. Ele pediu então que Gauss explicasse como obteve o resultado de maneira tão rápida. O pequeno gênio mostrou ao professor que ao somarmos 1 com 100, 2 com 99, 3 com 98 e assim, sucessivamente, o resultado 101 aparece 50 vezes, ou seja, multiplicando 101 por 50 obtemos 5050, que era a soma requisitada.

Figura 4.1: Carl Friedrich Gauss, conhecido como Príncipe dos Matemáticos.

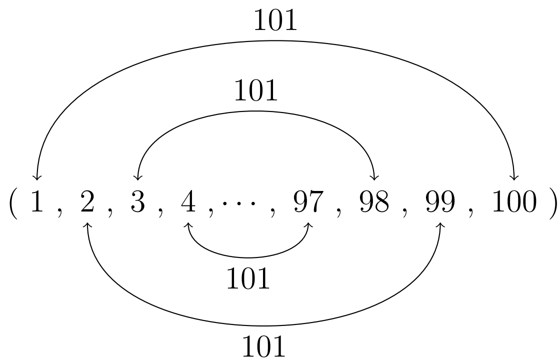


Figura 4.2: Representação gráfica da Soma de Gauss.

Essa história é interessante e muito difundida nos cursos e disciplinas de matemática. No entanto, poucos livros trazem aplicações sobre produtos notáveis e uma aplicação interessante é a possibilidade do uso de produtos notáveis para encontrar a soma S abaixo

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n. \tag{4.1}$$

Vamos usar o fato que

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
\text{Para } x = 1,\ \text{temos } 2^2 - 1^2 &= 2.1 + 1\\
\text{Para } x = 2,\ \text{temos } 3^2 - 2^2 &= 2.2 + 1\\
\text{Para } x = 3,\ \text{temos } 4^2 - 3^2 &= 2.3 + 1\\
\text{Para } x = 4,\ \text{temos } 5^2 - 4^2 &= 2.4 + 1\\
&\vdots\\
\text{Para } x = (n-2),\ \text{temos } (n-1)^2 - (n-2)^2 &= 2.(n-2) + 1\\
\text{Para } x = (n-1),\ \text{temos } n^2 - (n-1)^2 &= 2.(n-1) + 1\\
\text{Para } x = n,\ \text{temos } (n+1)^2 - n^2 &= 2.n + 1
\end{aligned}$$

Somando dos dois lados da igualdade observamos

$$\begin{aligned}
\cancel{2^2} - 1^2 &= 2.1 + 1\\
\cancel{3^2} - \cancel{2^2} &= 2.2 + 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cancel{4^2} - \cancel{3^2} &= 2.3 + 1 \\
\cancel{5^2} - \cancel{4^2} &= 2.4 + 1 \\
&\vdots \\
\cancel{(n-1)^2} - \cancel{(n-2)^2} &= 2.(n-2) + 1 \\
\cancel{n^2} - \cancel{(n-1)^2} &= 2.(n-1) + 1 \\
(n+1)^2 - \cancel{n^2} &= 2.n + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(n+1)^2 - 1^2 &= 2.[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n] + n \\
(n+1)^2 - 1 &= 2S + n
\end{aligned}
$$

Segue que, $2S = (n+1)^2 - (n+1) \Rightarrow 2S = (n+1)[(n+1) - 1]$, ou seja,

$$S = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.2}$$

Notemos que aplicando (4.2) para encontrar a soma

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100,$$

obtemos, $S = \dfrac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$. Essa é uma aplicação de produtos notáveis e pode ser usada de forma generalizada para encontrar as somas

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2, \text{ ou } S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$$

e assim por diante.

4.1 Fatoração

Dada uma expressão algébrica escrita como uma soma de termos, podemos fatorar tal expressão sempre que as parcelas tiverem fatores em comum. Fatorar significa escrever na forma de produto. Vejamos algumas técnicas para proceder uma fatoração.

Fator Comum

Inicialmente, identificamos um termo comum a todas as parcelas da expressão. Em seguida, colocamos esse termo em evidência.

Exemplo 1

a) $ax + ay = a(x+y)$;

b) $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{2}{z} = \dfrac{1}{z}(xy + 2)$;

Agrupamento

Às vezes, não é possível identificar, inicialmente, um fator comum a todas as parcelas da expressão. Nesse caso, formamos dois ou mais grupos com um termo comum. Em seguida, colocamos em evidência o fator comum a todos os grupos.

Exemplo 2

a) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$;

b) $2xy - 12x + 3by - 18b = 2x(y - 6) + 3b(y - 6) = (2x + 3b)(y - 6)$;

c) $6x^2b + 42x^2 - y^2b - 7y^2 = (6x^2 - y^2)(b + 7)$;

d) $2xy - 4x + 3xy - 6x + 4xy - 8x = 9x(y - 2)$

4.2 Exercícios

1. Assinale V para verdadeiro e F para falso:

   a) $(x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3$
   b) $(x + y)^3 = x^3 + y^3$
   c) $(x - y)^3 = x^3 - y^3$
   d) $\left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1$

2. Seja $a^2 + b^2 = 25$. Qual é o valor positivo de $a + b$ sabendo que $a \cdot b = 12$?

3. O resultado $y^2x^2 - 4a^2$ é obtido por meio de qual dos produtos notáveis abaixo?

   a) $(yx + 2a)^2$
   b) $(x + a)(y - 2)$
   c) $(y + a)(x + 2)$
   d) $(yx + 2a)(yx - 2a)$
   e) $(yx + 2a)^2$

4. Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

   a) $(x + y)^2$
   b) $(2a + b)^2$
   c) $(x - 3y)^2$
   d) $(3 - a^3)^2$
   e) $(5x^2 + 2y)(5x^2 - 2y)$
   f) $(x + y)^3$
   g) $(3x^3 - 7y)^2$

5. Sabe-se que $x^2 + y^2 = 20$ e $x \cdot y = 3$, qual é o valor de $(x + y)^2$?

6. Escreva as expressões a seguir de forma reduzida:

   a) $(3m+n)^2 + 2n^2$

   b) $(2a+2b)^2 - a \cdot (a-2b)$

7. Se $x + \dfrac{1}{x} = b$, calcule $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

8. A diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números reais é igual:

   a) a diferença dos quadrados dos dois números.

   b) a soma dos quadrados dos dois números.

   c) a diferença dos dois números.

   d) ao dobro do produto dos números.

   e) ao quádruplo do produto dos números.

9. A soma dos quadrados de dois números positivos é 4 e a soma dos inversos de seus quadrados é 1. Determine:

   a) o produto dos dois números

   b) a soma dos dois números

10. (UNIMEP-SP) A diferença entre o quadrado da soma de dois números inteiros e a soma de seus quadrados não pode ser

    a) 12

    b) 6

    c) 4

    d) 2

    e) 9

11. (Fatec-SP) Sabe-se que $a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40$ e $a - b - c = 10$ e que a, b e c säo números reais. Então, o valor de $a + b + c$ é igual a

    a) 1

    b) 2

    c) 4

    d) 10

    e) 20

12. (UFV-MG) Sabendo-se que $x+y=\dfrac{15}{7}$ e $x-y=\dfrac{1}{14}$, qual é o valor da expressão seguinte?

$$\frac{(x^2+2xy+y^2)(x^3-y^3)}{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)} \div \frac{(x^2-xy)}{2x}$$

    a) 30
    b) $\dfrac{30}{7}$
    c) 60
    d) $\dfrac{60}{7}$
    e) 25

13. (UFMG) Se $a^2+3b^2=\dfrac{1}{a}$, a expressão $(a+b)^3+(a-b)^3$ é igual a

    a) $2(1-3ab^2)$
    b) $2a^2$
    c) $\dfrac{1}{a}$
    d) 1
    e) 2

14. (UFMG) Fatorando-se a expressão $x^4-y^4+2x^3y-2xy^3$, obtém-se

    a) $(x+y)^2(x-y)^2$
    b) $(x+y)(x-y)^3$
    c) $(x^2+y^2)(x-y)^2$
    d) $(x+y)^4$
    e) $(x+y)^3(x-y)$

15. (PUC-MG) A diferença entre os quadrados de dois números ímpares, positivos e consecutivos é 40. Esses números pertencem ao intervalo

    a) $[3,9]$
    b) $[4,10]$
    c) $[8,14]$
    d) $[10,15]$
    e) $[9,11[$

16. (UFES) Calcule o valor da expressão:

$$[10^2+20^2+30^2+\ldots+100^2]-[9^2+19^2+29^2+\ldots+99^2]$$

17. (FUVEST-SP) Sabendo que x, y e z são números reais e $(2x+y-z)^2+(x-y)^2+(z-3)^2 = 0$, então $x + y + z$ é igual a

    a) 3
    b) 4
    c) 5
    d) 6
    e) 7

18. (PUC-RJ) Se $x^2(1 - y)^2 = y^2(1 - x)^2$ e $x \neq y$, então $x + y$ será

    a) $x^2 + y^2$
    b) xy
    c) 2
    d) $2xy$
    e) $2y$

19. (UFOP-MG) Simplificando a expressão

$$\frac{ax^2 - ay^2}{x^2 - 4xy + 3y^2}$$

para $x \neq y$, obtém-se

    a) $\dfrac{a(x-y)}{x+3y}$
    b) $\dfrac{x-y}{x+3y}$
    c) $\dfrac{a(x+y)}{x-3y}$
    d) $\dfrac{x+y}{x-3y}$

20. (PUC-MG) Após simplificar a expressão $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$, com $x \neq 1$, obtém-se

    a) $\dfrac{2x-1}{3x+1}$
    b) $\dfrac{3x+1}{2x-1}$
    c) $\dfrac{3x-1}{2x+1}$
    d) $\dfrac{2x+1}{3x-1}$
    e) $\dfrac{2x-1}{3x-1}$

CAPÍTULO 5

Regra de Três Simples e Composta

Quando um problema apresenta exatamente duas grandezas, o processo de resolução recebe o nome de regra de três simples. Quando envolve três grandezas ou mais recebe o nome de regra de três composta. Uma regra de três simples pode ser classificada em direta ou inversa, de acordo com a relação de proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas.

5.1 Regra de Três Simples

Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas X e Y são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra também aumenta na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra também diminui na mesma proporção. Dessa forma, se duas grandezas X e Y são diretamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão, isto é, existe uma constante c tal que:

$$\frac{X}{Y} = c \Rightarrow X = cY \tag{5.1}$$

Exemplo 1

Uma loja vende o metro de um determinado tecido por $R\$ \ 5,00$, o valor recebido com a venda de 5 metros de tecido é de $R\$ \ 25,00$.

Quantidade	Valor
1 metro	$R\$ \ 5,00$
2 metros	$R\$ \ 10,00$
3 metros	$R\$ \ 15,00$
4 metros	$R\$ \ 20,00$
5 metros	$R\$ \ 25,00$

Exemplo 2

Ao encher uma caixa de água, medimos a altura da água a cada 3 minutos. Se ao fim dos primeiros 3 minutos tínhamos 15 litros, ao fim de 24 minutos teremos 120 litros.

Tempo	Quantidade
3 minutos	15 litros
6 minutos	30 litros
⋮	⋮
21 minutos	105 litros
24 minutos	120 litros

Exemplo 3

Se um operário produz 100 metros quadrados de piso por dia, 5 operários trabalhando sob condições homogêneas ao primeiro devem produzir 500 metros quadrados de piso por dia.

Operários	Quantidade
1	100
2	200
3	300
4	400
5	500

Grandezas Inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais se as duas variam em sentido contrário, ou seja, quando uma aumenta, a outra diminui. Por exemplo, velocidade média e tempo são grandezas inversamente proporcionais, pois quanto maior for a velocidade média ao percorrer certa distância, menor será o tempo gasto nesse percurso.

Exemplo 4

Se 5 operários fazem uma obra em 40 dias, em quantos dias 8 operários fariam a mesma obra?

Operários	Tempo (dias)
5	40
8	x

Se o número de operários aumenta, o número de dias para realizar o mesmo trabalho diminui. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais. Nesse caso, a proporção formada será

$$\frac{5}{12} = \frac{x}{40}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$12x = 5 \times 40 \Rightarrow 12x = 200 \Rightarrow x = 25$$

Ou seja, se 5 operários terminam uma obra em 40 dias, então 8 operários fariam a mesma obra em 25 dias.

5.2 Regra de Três Composta

Na regra de três composta ocorrem três ou mais grandezas relacionadas entre si. Nesse caso, em apenas uma grandeza é dado um valor conhecido e para as demais grandezas são dados dois valores. Na resolução desse tipo de situação-problema, vamos utilizar um método semelhante ao utilizado na resolução de regras de três simples.

Exemplo 5

Trabalhando 8 horas por dia, durante 18 dias, 20 operários produzem 100 unidades de determinado eletrodoméstico. Quantos dias serão necessários para que 30 operários, trabalhando 6 horas por dia, produzam 200 unidades desse mesmo produto?
Primeiro devemos elaborar uma tabela da seguinte forma:

Horas/dia	Dias	Operários	Produção (unidades)
8	18	20	100
6	x	30	200

Em seguida, devemos comparar cada uma das colunas com a coluna que possui a variável desconhecida e observar se são direta ou inversamente proporcionais. Ou seja, comparando a primeira coluna observamos que a medida que o número de horas por dia diminui, o número de dias para produzir a mesma quantidade aumenta, assim, tais grandezas são inversamente proporcionais. Em seguida, observamos que se o número de operários aumenta, o número de dias de trabalho diminui, logo, estas também são grandezas inversamente proporcionais. Por fim, observamos que a medida que o número de unidades de produção aumenta, o número de dias de trabalho também deve aumentar, logo, tais grandezas são diretamente proporcionais. Dessa forma, montamos a proporção seguinte:

$$\frac{18}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{30}{20} \cdot \frac{100}{200}$$

Isolando o valor de x, temos:

$$x = 18 \cdot \frac{8 \cdot 20 \cdot 200}{6 \cdot 30 \cdot 100} = 32$$

Logo, seriam necessários 32 dias para produzirem as 200 unidades.

5.3 Exercícios

1. Um trem percorre 120 km em $3h$. Para percorrer 200 km, mantendo a mesma velocidade média, esse trem levará:

   a) 4 horas
   b) 4 horas e 30 minutos
   c) 5 horas
   d) 5 horas e 30 minutos

2. Se um automóvel faz 60 km com 5 litros de gasolina, a quantidade de litros de gasolina que esse automóvel gastaria para percorrer 180 km, nas mesmas condições, é de:

   a) 9 litros
   b) 12 litros
   c) 14 litros
   d) 15 litros

3. Um ônibus com velocidade média de 60 km/h percorre a distância entre duas cidades em $4h$. O tempo que esse veículo levará para percorrer a mesma distância, se aumentar a velocidade média para 80 km/h, será:

   a) 1 hora e 30 minutos
   b) 2 horas
   c) 2 horas e 20 minutos
   d) 3 horas

4. Num livro de 270 páginas, há 40 linhas em cada página. O número de páginas que o livro teria, se houvesse 45 linhas por páginas, seria igual a:

   a) 280
   b) 240
   c) 230
   d) 210

5. Se 10 pedreiros levam 60 dias para construir uma casa, o tempo que 6 pedreiros levariam para construir uma casa idêntica seria de:

   a) 100 dias
   b) 120 dias
   c) 150 dias
   d) 180 dias

6. Trinta operários construíram 600 m de uma ponte, trabalhando 8 horas por dia, durante 20 dias. O tempo com que, nas mesmas condições, 50 operários, trabalhando 6 horas por dia, construiriam 1200 m de ponte, é de:

   a) 32 dias
   b) 31 dias
   c) 29 dias
   d) 27 dias

7. Em uma locadora de automóveis, oito carros iguais consomem 100 litros de gasolina, em cinco dias. Quantos carros, idênticos aos primeiros, consomem 500 litros, em 10 dias?

   a) 19
   b) 20
   c) 22
   d) 23

8. (OBMEP 2019) Três cachorros precisam de 7 horas para cavarem 9 buracos. Cinco passarinhos gastam 40 minutos para construárem 2 ninhos. Mantendo-se essas taxas, quantos minutos a mais um cachorro leva para cavar um buraco do que um passarinho leva para construir um ninho?

9. (OBMEP 2011) Alberto, Bernardo e Carlos disputaram uma corrida, na qual cada um deles correu com velocidade constante durante todo o percurso. Quando, Alberto cruzou a linha de chegada, Bernardo e Carlos estavam 36 e 46 metros atrás dele, respectivamente. Quando Bernardo cruzou a linha de chegada, Carlos estava 16 metros atrás dele. Qual é o comprimento da pista?

   a) 96 m
   b) 100 m
   c) 120 m
   d) 136 m
   e) 144 m

10. (PUC-MG) Os habitantes de certa ilha têm predileção por uma loteria na qual o jogador deve escolher pelo menos 5 das 35 letras que compõem o alfabeto utilizado no lugar. Vence o jogo quem acertar as 5 letras sorteadas independente da ordem do sorteio. Pela aposta em uma quina, o jogador paga um *pin*, unidade monetária da ilha. Caso um apostador decida aumentar suas chances de ganhar marcando 7 letras, o preço que deverá pelo jogo, em *pins*, será:

    a) 14
    b) 16
    c) 19
    d) 21

11. (FUVEST) Um automóvel, modelo*flex*, consome 34 litros de gasolina para percorrer 374 km. Quando se opta pelo uso do álcool, o automóvel consome 37 litros deste combustível para percorrer 259 km. Suponha que um litro de gasolina custe $R\$\ 2,20$. Qual deve ser o preço do litro do álcool para que o custo do quilômetro rodado por esse automóvel, usando somente gasolina ou somente álcool como combustível, seja o mesmo?

    a) $R\$\ 1,00$
    b) $R\$\ 1,10$
    c) $R\$\ 1,20$
    d) $R\$\ 1,30$
    e) $R\$\ 1,40$

12. (ENEM 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

    a) 12 kg
    b) 16 kg
    c) 24 kg
    d) 36 kg
    e) 75 kg

13. (UNIFOR-CE) Se 6 impressoras iguais produzem 1000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziriam 2000 desses panfletos?

    a) 160 minutos
    b) 150 minutos
    c) 140 minutos
    d) 130 minutos

14. (PUC-RJ) Um festival foi realizado num campo de 240 m por 45 m. Sabendo que por cada 2 m^2 havia, em média, 7 pessoas, quantas pessoas havia no festival?

    a) 42.007
    b) 41.932
    c) 37.800
    d) 24.045
    e) 10.000

15. (ENEM 2017) Uma televisão pode ser posicionada de modo que se consiga enxergar os detalhes de uma imagem em alta definição. Considere que a distância ideal, com conforto visual, para se assistir à televisão de 32 polegadas é de $1,8$ metro. Supunha que haja uma relação de proporcionalidade direta entre o tamanho da tela (medido em polegada) e a distância ideal. Considere que um espectador dispõe de uma televisão de 60 polegadas e que ele deseja se posicionar em frente a ela, com conforto visual. A distância da televisão, em metro, em que o espectador deve se posicionar para que tenha conforto visual é mais próxima de

    a) $0,33$
    b) $0,96$
    c) $1,57$
    d) $3,37$
    e) $3,60$

16. (ENEM 2012) Nos shopping centers costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques. Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo shopping custa $R\$3,00$ e que uma bicicleta custa 9200 tíquetes. Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é

    a) 153
    b) 460
    c) 1218
    d) 1380
    e) 3066

17. (CEFET-CE) Um ciclista percorreu 150 km em 3 dias, pedalando 2 horas, diariamente. Pedalando 4 horas por dia, durante 4 dias, ele percorrerá _______ quilômetros.

    a) 300
    b) 350
    c) 400
    d) 450
    e) 500

18. (ENEM 2014) Um show especial de Natal teve 45.000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o show, para efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao show e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados. Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

    a) 1 hora
    b) 1 hora e 15 minutos
    c) 5 horas
    d) 6 horas
    e) 6 horas e 15 minutos

19. (ENEM 2013) Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota d'agua tem volume de $0,2\ mL$. Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

    a) $0,2$
    b) $1,2$
    c) $1,4$
    d) $12,9$
    e) $64,8$

20. (ENEM 2014) Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

    Recipiente I : $0,125$ litro
    Recipiente II : $0,250$ litro
    Recipiente III : $0,320$ litro
    Recipiente IV : $0,500$ litro
    Recipiente V : $0,800$ litro

    O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez. Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

    a) I
    b) II
    c) III
    d) IV
    e) V

21. (PUC-MG) Preparando-se para a Volta Internacional da Pampulha, que mede 17.800 m, certo atleta treina diariamente e, a cada dia, corre 150 m a mais do que no dia anterior. Nesse ritmo, no décimo segundo dia, ele corre um total de 3.650 m. A partir dessas informações, pode-se estimar que, para estar em condições de cumprir essa prova, esse atleta deverá treinar, no mínimo, durante:

    a) 107 dias
    b) 110 dias
    c) 113 dias
    d) 116 dias

22. (ENEM 2014) Diariamente, uma residência consome 20.160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 $cm \times 8$ cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome. Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

    a) Retirar 16 células
    b) Retirar 40 células
    c) Acrescentar 5 células
    d) Acrescentar 20 células
    e) Acrescentar 40 células

23. (ENEM 2017) Em alguns países anglo-saxões, a unidade de volume utililizada para indicar o conteúdo de alguns recipientes é a onça britânica. O volume de uma onça fluida británica corresponde a $28,4130625$ mL. A título de simplificação, considere uma onça fluida britânica correspondendo a 28 mL. Nessas condições, o volume de um recipiente com capacidade de 400 onças fluidas britânicas, em cm^3, é igual a

    a) 11.200
    b) 1.120
    c) 112
    d) $11,2$
    e) $1,12$

24. (ENEM 2016) Um clube tem um campo de futebol com área total de 8000 m^2 correspondente ao gramado. Usualmente, a poda da grama desse campo é feita por duas máquinas do clube próprias para o serviço. Trabalhando no mesmo ritmo, as duas máquinas podam juntas 200 m^2 por hora. Por motivo de urgência na realização de uma partida de futebol, o administrador do campo precisará solicitar ao clube vizinho máquinas iguais às suas para fazer o serviço de poda em um tempo máximo de $5h$. Utilizando as duas máquinas que o clube já possui, qual o número mínimo de máquinas que o administrador do campo deverá solicitar ao clube vizinho?

    a) 4
    b) 6
    c) 8
    d) 14
    e) 16

25. (ENEM 2012) Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas(ABNT). Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros de água por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?

    a) 24 litros
    b) 36 litros
    c) 40 litros
    d) 42 litros
    e) 50 litros

26. (PUC-CAMP) Sabe-se que 5 máquinas, todas de igual eficiência, são capazes de produzir 500 peças em 5 dias, se operarem 5 horas por dia. Se 10 máquinas iguais às primeiras operassem 10 horas por dia durante 10 dias, o número de peças produzidas seria:

    a) 1.000
    b) 2.000
    c) 4.000
    d) 5.000
    e) 8.000

27. (ENEM 2013) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Está indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

    a) 2
    b) 4
    c) 5
    d) 8
    e) 9

28. (ENEM 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veiculo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas. quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

    a) 300 tijolos
    b) 360 tijolos
    c) 400 tijolos
    d) 480 tijolos
    e) 500 tijolos

29. (ENEM 2017) Uma indústria tem um setor totalmente automatizado. São quatro máquinas iguais, que trabalham simultânea e ininterruptamente durante uma jornada de 6 horas. Após esse período, as máquinas são desligadas por 30 minutos para manutenção. Se alguma máquina precisar de mais manutenção, ficará parada até a próxima manutenção. Certo dia, era necessário que as quatro máquinas produzissem um total de 9.000 itens. O trabalho começou a ser feito às 8 horas. Durante uma jornada de 6 horas, produziram 6.000 itens, mas na manutenção observou-se que uma máquina precisava ficar parada. Quando serviço foi finalizado, as três máquinas que continuaram operando passaram por uma nova manutenção, chamada manutenção de esgotamento. Em que horário começou a manutenção de esgotamento?

    a) $16h\ 45\ min$
    b) $18h\ 30\ min$
    c) $19h\ 50\ min$
    d) $21h\ 15\ min$
    e) $22h\ 30\ min$

30. (ENEM 2016) Para construção de isolamento acústico numa parede cujo a área mede $9\ m^2$, sabe-se que, se a fonte sonora estiver a $3\ m$ do plano da parede, o custo é de $R\$\ 500,00$. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento. Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área A (em metro quadrado), situada a D metros da fonte sonora, é

    a) $\dfrac{500 \cdot 81}{AD^2}$
    b) $\dfrac{500 \cdot A}{D^2}$
    c) $\dfrac{500 \cdot D^2}{A}$
    d) $\dfrac{500 \cdot A \cdot D^2}{81}$
    e) $\dfrac{500 \cdot 3 \cdot D^2}{A}$

CAPÍTULO 6

Razão e Proporção

Razão

A palavra razão, em latim *ratio*, significa divisão ou quociente entre dois números. Ou seja, sendo a e b dois números, com $b \neq 0$, denomina-se razão de a e b o quociente $\frac{a}{b}$. Os números a e b são os termos da razão, na qual a é o antecedente e b o termo consequente $(b \neq 0)$. Alguns exemplos são:

Exemplo 1

a) A razão de 3 para 2 é $\frac{3}{2}$ ou $3 : 2$;

b) A razão de 5 para 3 é $\frac{5}{3}$ ou $5 : 3$;

c) A razão de 4 para 20 é $\frac{4}{20} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ou $1 : 5$;

d) A razão entre $\frac{1}{3}$ e 4 é $\frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ou $1 : 12$.

A razão entre duas grandezas, dadas em certa ordem, é o quociente entre a medida da primeira grandeza e a medida da segunda (sendo esta última diferente de zero). Se as grandezas que formam a razão possuem a mesma unidade de medida, o resultado é um número adimensional, ou seja, um número que não apresenta unidade de medida. Observe os exemplos:

Exemplo 2

a) A razão entre 5 horas e 10 horas é $\frac{5\ horas}{10\ horas} = \frac{1}{2}$;

b) A razão entre 20 cm e 10 m é $\frac{0,2\ m}{10\ m} = \frac{2}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{100} = 0,02$;

c) A razão entre 20 minutos e 1 hora é $\frac{20\ min}{60\ min} = \frac{1}{3}$, ou seja, é 1 para 3.

Se as grandezas que formam uma razão não possuem a mesma unidade de medida, a unidade da razão resultante vai depender das unidades das grandezas do antecedente e do consequente.

Exemplo 3

O deslocamento diário de 10 quilômetros de casa para a escola, é percorrido por um estudante em 2 horas. A razão entre a distância percorrida e o tempo gasto em percorrê-la é $\dfrac{10\ km}{2\ h} = 5\ km/h$, ou seja, a velocidade média de deslocamento é de 5 kilômetros por hora.

Proporção

A palavra proporção vem do latim *proportione* e representa uma relação entre as partes de uma grandeza, ou seja, é uma igualdade entre duas razões.

Escola	Número de professores de matemática	Total de professores
A	5	25
B	3	15

A razão entre o número de professores de matemática e o total de professores de cada Escola é:

$$\text{Filial A: } \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$
$$\text{Filial B: } \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Quando simplificamos cada uma das razões acima, encontramos o mesmo número, logo podemos afirmar que $\dfrac{5}{25} = \dfrac{3}{15}$ (ou $5 : 25 :: 3 : 15$). A leitura de cada uma dessas expressões é a mesma: "5 está para 25, assim como 3 está para 15". Ou seja, dados os números $5, 25, 3$ e 15, nesta ordem, temos que a razão entre os dois primeiros é igual a razão entre os dois últimos. Assim, dizemos que $5, 25, 3$ e 15, formam uma proporção.

Em geral, dado quatro números reais e diferentes de zero (a, b, c e d), em certa ordem, se a razão entre os dois primeiros for igual a razão entre os dois últimos, ou seja, se, por exemplo, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, dizemos que os números a, b, c e d, nesta ordem, formam uma proporção.

Observações:

Se a, b, c e $d \in \mathbb{R}^*$ e $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, dizemos que:

i) a, b, c e d são os termos da proporção;

ii) a e c são os antecedentes;

iii) b e d são os consequentes;

iv) a e d são os extremos da proporção;

v) b e c são os meios da proporção;

Propriedades Importantes

Consideremos que para a, b, c e d não nulos tenhamos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ e } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}. \tag{6.1}$$

Ao assumir tais proporções podemos demonstrar as próximas propriedades.

> **Propriedade 1:** Em uma proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o 2° (ou 1°) termo, assim como a soma dos dois últimos está para o 4° (ou 3°).

Demonstração:

Adicionando 1 a cada membro das proporções $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, obtemos:

$$\begin{array}{cccc} & \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 & \text{e} & \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \\ \Rightarrow & \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} & \text{e} & \frac{b}{a} + \frac{a}{a} = \frac{d}{c} + \frac{c}{c} \\ \Rightarrow & \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} & \text{e} & \frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c} \end{array}$$

> **Propriedade 2:** Em uma proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 2° (ou °) termo, assim como a diferença dos dois últimos está para o 4° (ou 3°).

Demonstração:

Subtraindo 1 a cada membro das proporções $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, obtemos:

$$\begin{array}{cccc} & \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 & \text{e} & \frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1 \\ \Rightarrow & \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d} & \text{e} & \frac{b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{d}{c} - \frac{c}{c} \\ \Rightarrow & \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} & \text{e} & \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c} \end{array}$$

Propriedade 3: Em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Demonstração:

Considere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, permutando os meios, obtemos $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Aplicando a propriedade 1, temos que $\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$, logo, permutando os meios, concluímos que

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Propriedade 4: Em uma proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Demonstração:

Considere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, permutando os meios, obtemos $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Aplicando propriedade 2, temos que $\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$, logo, permutando os meios, concluímos que

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Propriedade 5: Em uma proporção, o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para quadrado do seu consequente.

Demonstração:

Considere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, multiplicando os dois membros por $\frac{a}{b}$, obtemos $\frac{a^2}{b^2} = \frac{ac}{bd}$. Logo,

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}.$$

6.1 Exercícios

1. Calcule a razão do 1° para o 2° número, nos pares apresentados abaixo:

   a) 20 e 40
   b) 35 e 27
   c) 13 e 39
   d) 5 e 20
   e) 9 e 12
   f) 10 e 25
   g) 12 e 30
   h) $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{5}$
   i) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$

2. Determine a razão da primeira para a segunda grandeza:

    a) 46 cm e 92 cm
    b) 25 hm e 125 hm
    c) 500 g e 2 kg
    d) 18 km e 9.200 cm

3. Num exame, havia 180 candidatos. Tendo sido aprovados 45, a razão entre o número de reprovados e o de aprovados é de?

4. Uma escola possui 1800 alunos matriculados e 600 foram selecionados para participar de um concurso de redação. Qual é a razão que representa o total de alunos selecionados?

5. Uma loja de móveis fez o balanço da quantidade de sofás que foram vendidos. A razão entre o número total de sofás e o número de sofás vendidos foi de 7 para 4. Sabendo que na loja foram vendidos 12 sofás, calcule a quantidade total de sofás.

6. Numa sala com 75 alunos, 25 são mulheres. Determine:

    a) a razão do número de homens para o número de mulheres
    b) a razão do número de mulheres para o total de alunos
    c) de cada 10 alunos, quantos são homens?
    d) de cada 20 alunos, quantas são mulheres?

7. Dois quadrados têm, respectivamente, 4 cm e 8 cm de lado. Qual é a razão entre as superfícies (área) do primeiro e do segundo quadrado?

8. Numa classe de 50 alunos, 12 foram reprovados. Determine a razão entre as reprovações e as aprovações.

9. Dois segmentos medem 7 dm e 140 cm, respectivamente. A razão entre o primeiro e o segundo é?

10. Em que razão estão os volumes de dois cubos cujas arestas medem, respectivamente, 3 cm e 8 cm?

11. Uma mercadoria acondicionada numa embalagem de papelão possui 250 g de peso líquido e 300 g de peso bruto. Qual a razão do peso líquido para o peso bruto?

12. Um retângulo A tem 15 cm e 20 cm de dimensões, enquanto as dimensões de um retângulo B são 5 cm e 10 cm. Qual é a razão entre a área do retângulo A e a área do retângulo B?

13. Numa prova de matemática, um aluno acertou 18 das 30 questões dadas. Qual é a razão do número de questões que ele acertou para o número de questões da prova?

14. O volume de um cubo é igual ao cubo da medida da aresta. Qual é a razão entre os volumes de dois cubos cujas arestas medem 11 cm e 12 cm respectivamente?

15. Uma equipe de futebol apresenta o seguinte retrospecto durante o ano de 1997: 26 vitórias, 20 empates e 10 derrotas. Qual é a razão do número de vitórias para o número de partidas disputadas?

16. Uma escola tem 600 m^2 de área construída e 900 m^2 de área livre. A razão da área construída para a área livre é?

17. Numa escola estudam 270 meninas e 190 meninos. A razão entre o número de meninos e de meninas é?

18. Um atleta masculino salta uma distância de $7,90\ m$, enquanto que uma atleta feminina salta $6,30\ m$. Qual a razão entre os saltos?

19. Se Elisa recebe $R\$$ 450 por hora e seu colega $R\$$ 1.350, qual a razão entre os salários de ambos?

20. Determine a razão entre os preços de um caderno de uma marca e de outra, que custam, respectivamente, $R\$\ 7,00$ e $R\$\ 3,50$.

21. Uma prova de matemática tem 12 questões. Um aluno acertou 10 destas questões. Determine:

    a) A razão do número de questões que acertou para o total de questões

    b) A razão do número de questões que errou para o número de questões que acertou

22. Numa classe de 60 alunos, 15 foram reprovados. Pede-se a razão de número de reprovados para o número de alunos da classe.

23. Na minha casa, a área construída é de 110 m^2 e a área livre é de 30 m^2. Qual é a razão da área construída para a área livre?

24. Dois terrenos quadrados têm, respectivamente 13 m e 22 m de lado. Qual é a razão da área do primeiro terreno para a área do segundo terreno?

25. Como ficaria a repartição de uma herança de $R\$\ 395.000,00$ entre 5 pessoas na razão direta do número de filhos e na razão inversa das idades de cada uma delas onde a primeira pessoa tem 28 anos e 4 filhos, a segunda pessoa tem 35 anos e 3 filhos, a terceira pessoa 58 anos e 8 filhos, a quarta pessoa 17 anos e 0 filhos e a quinta pessoa 24 anos e 1 filho.

26. Dois números somados totalizam 710. Sabe-se que um deles está para 7, assim como o outro está para 11. Quais são os dois números?

27. Um número a somado a um outro número b totaliza 125. a está para 5, assim como b está para 7. Qual o valor de a e de b?

28. Um número a subtraído de um outro número b resulta em 30. a está para 13, assim como b está para 11. Qual o valor de a e de b?

29. A diferença entre dois números é igual a 49. O maior deles está para 27, assim como o menor está para 13. Quais são os números?

30. O peso de uma sacola em kg está para o peso de uma outra sacola também em kg, assim como 22 está para 18. Quanto pesa cada uma das sacolas, sabendo-se que juntas elas pesam 20 kg?

31. (OBMEP 2011) Alberto, Bernardo e Carlos disputaram uma corrida, na qual cada um deles correu com velocidade constante durante todo o percurso. Quando Alberto cruzou a linha de chegada, Bernardo e Carlos estavam 36 e 46 metros atrás dele, respectivamente. Quando Bernardo cruzou a linha de chegada, Carlos estava 16 metros atrás dele. Qual é o comprimento da pista?

    a) 96 m
    b) 100 m
    c) 120 m
    d) 136 m
    e) 144 m

32. Um protótipo foi desenhado na escala 1 : 100. Qual será o comprimento desse protótipo se o modelo em tamanho real tem um comprimento igual a $6,00\ m$?

33. Numa prefeitura para cada $R\$\ 13,00$ aplicados em educação deve-se, por lei, aplicar $R\$\ 5,00$ na área de saúde. Se num mês forem aplicados $R\$\ 27.000,00$ em saúde, que valor deve ser aplicado em educação?

34. (FUVEST) Em uma festa com n pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem.O número n de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a

    a) 100
    b) 105
    c) 115
    d) 130
    e) 135

35. (UTF-PR) A razão entre a área construída e a área sem construções de um terreno é de $\frac{3}{25}$. Se a área construída é de 150 m^2, qual é a área sem construções?

    a) 12.700 m^2
    b) 7.500 m^2
    c) 6.250 m^2
    d) 3.150 m^2
    e) 1.250 m^2

36. (CEFET-SC) Sabendo que $x + y = 14$, determine x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

    a) $x = 6$ e $y = 8$
    b) $x = 8$ e $y = 6$
    c) $x = 7$ e $y = 7$
    d) $x = 5$ e $y = 9$
    e) $x = 9$ e $y = 5$

37. (ENEM 2013) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto. Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

    a) $1,75$
    b) $2,00$
    c) $2,33$
    d) $4,00$
    e) $8,00$

38. (ENEM 2016) Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água. Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização. Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

    Filtro 1 $(F1)$: 18 mg em 6 dias;
    Filtro 2 $(F2)$: 15 mg em 3 dias;
    Filtro 3 $(F3)$: 18 mg em 4 dias;
    Filtro 4 $(F4)$: 6 mg em 3 dias;
    Filtro 5 $(F5)$: 3 mg em 2 dias.

    Ao final, descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.
    Disponível em: www.redebrasilatual.com.br. Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado)
    O filtro descartado é o

    a) $F1$
    b) $F2$
    c) $F3$
    d) $F4$
    e) $F5$

39. (ENEM 2016) Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

    Marca A : 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
    Marca B : 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
    Marca C : 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
    Marca D : 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
    Marca E : 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

    Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.
    Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.
    A marca a ser escolhida é

    a) A
    b) B
    c) C
    d) D
    e) E

40. (ENEM 2016) Um banco de sangue recebe 450 ml de sangue de cada doador. Após separar o plasma sanguíneo das hemácias, o primeiro é armazenado em bolsas de 250 ml de capacidade. O banco de sangue aluga refrigeradores de uma empresa para estocagem das bolsas de plasma, segundo a sua necessidade. Cada refrigerador tem uma capacidade de estocagem de 50 bolsas. Ao longo de uma semana, 100 pessoas doaram sangue àquele banco. Admita que, de cada 60 ml de sangue, extraem-se 40 ml de plasma. O número mínimo de congeladores que o banco precisou alugar, para estocar todas as bolsas de plasma dessa semana, foi

    a) 2
    b) 3
    c) 4
    d) 6
    e) 8

CAPÍTULO 7

Porcentagem

A porcentagem ou percentagem vem do latim como *per centum* e significa “por cento"ou “a cada centena". Porcentagem é o valor obtido quando aplicamos uma fração de denominador 100 (fração centesimal) a um determinado valor, ou seja, multiplicamos a fração centesimal por esse valor. Toda porcentagem (%) é uma fração do tipo, a/b, expressa por $a/100$. Por exemplo 15% é o mesmo que 15 divido por 100, o que significa a décima quinta parte de 100, em geral expressamos

$$a\% = \frac{a}{100},$$

em que a é um número real qualquer.

Nesse contexto, quando escrevemos 5%, lemos cinco porcento, estamos usando uma outra forma para representar a razão $\frac{5}{100}$, também chamada de razão centesimal. Notemos que $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$.

Exemplo 1

a) 10% de R$ 25,00 é igual a R$ 2,50;

b) $33\% = \frac{33}{100}$;

c) $0,5\% = \frac{0,5}{100} = 0,005$;

d) 5% de 20% é igual a $\frac{5}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{1}{100} = 0,01$;

e) 20% de $R\$80,00$ é igual a $R\$\ 16,00$;

f) 80% de 75% de $R\$300,00$ é igual a $R\$\ 180,00$;

g) 20% de x é igual a 10, logo o valor de $x = \frac{100}{20} \times 10 = 50$;

h) 90% de x é igual a 9, logo o valor de $x = \frac{100}{90} \times 9 = 10$;

i) 5% de x é igual a 10, logo 7% de x é igual a 14.

j) 15% de x é igual a 60, logo 17% de x é igual a 68.

Lucro

Quando o valor de venda é superior ao valor de custo de determinado produto, dizemos que o vendedor obteve um lucro. A taxa percentual deste lucro pode ser obtida considerando-se o valor de compra ou de venda do produto.

Exemplo 2

Um celular foi comprado por $R\$\ 800,00$ (oitocentos reais) e vendido por $R\$\ 1.150,00$ (Um mil, cento e cinquenta reais). Para determinar a taxa percentual do lucro obtido, consideremos

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow \text{valor do custo ou valor inicial} \\ V &\longrightarrow \text{valor de venda} \\ L &\longrightarrow \text{Lucro} \\ i_L &\longrightarrow \text{Taxa percentual do lucro.} \end{aligned}$$

O lucro é determinado por

$$L = V - C, \text{ em que } V > C$$

Logo, no exemplo temos que $L = 1.150,00 - 800,00 = 350,00$.

A taxa percentual de lucro em relação ao valor de custo é dada pela razão entre o lucro e o valor de custo, ou seja,

$$i_L = \frac{L}{C} \times 100\%,$$

dessa forma, temos $i_L = \dfrac{350,00}{800,00} \times 100\% = 43,75\%$.

De outra forma, a taxa percentual de lucro em relação ao valor de venda é dada pela razão entre o lucro e o valor de venda, ou seja,

$$i_L = \frac{L}{V} \times 100\%,$$

dessa forma, temos $i_L = \dfrac{350,00}{1.150,00} \times 100\% \approx 30,43\%$.

Desconto ou Prejuízo

Quando o valor de venda é menor que o valor de custo temos um prejuízo. Podemos ter ainda, durante a compra de determinado produto um desconto. É claro que um desconto, não implica, necessariamente, em prejuízo, no entanto, para o cálculo percentual de desconto ou prejuízo, vamos proceder de maneira semelhante. Assim, não faremos distinção entre os termos prejuízo e desconto aqui.

Exemplo 3

Vejamos novamente um exemplo. Suponha que uma bicicleta seja apresentada pelo valor de $R\$ \ 800,00$ (oitocentos reais). Porém, no dia de aniversário da loja, durante uma promoção, o preço seja reduzido para $R\$ \ 500,00$ (quinhentos reais). Quais são as taxas percentuais envolvidas no desconto apresentado. Para facilitar os cálculos, consideremos

$$D \longrightarrow \text{Desconto ou prejuízo}$$
$$i_D \longrightarrow \text{Taxa percentual de desconto.}$$

O desconto é determinado por

$$D = |C - V|,$$

assim no exemplo temos $D = |800,00 - 500,00| = 300,00$. A taxa percentual de desconto em relação ao valor de custo é dada pela razão entre o desconto e o valor de custo, ou seja,

$$i_D = \frac{D}{C} \times 100\%.$$

Logo, de acordo com o exemplo, temos $i_D = \dfrac{300,00}{800,00} \times 100\% = 37,5\%$.

Por outro lado, a taxa percentual de desconto em relação ao valor total de venda é dada pela razão entre o desconto e o valor de venda, ou seja,

$$i_D = \frac{D}{V} \times 100\%.$$

Assim, de acordo com o exemplo, temos $i_D = \dfrac{300,00}{500,00} \times 100\% = 60\%$.

Acréscimos e Descontos Sucessivos

Se um produto com preço inicial P_0 sofre acréscimos sucessivos, cujas taxas percentuais são $i_1, i_2, \cdots, i_n$, então o preço desse produto após n reajustes é

$$P_n = P_0 \times (1 + i_1) \times (1 + i_2) \times \cdots \times (1 + i_n),$$

em particular, se os acréscimos forem taxas percentuais iguais, isto é, $i_1 = \cdots = i_n = i$, então

$$P_n = P_0(1 + i)^n.$$

Exemplo 4

Durante um mês com alta variação nos preços de alimentos, o preço do pacote de 5 kg de arroz, que inicialmente era de $R\$ \ 10,00$, sofreu aumentos sucessivos de 5%, 15% e novamente de 5%. Qual o preço atual?

O preço atual é dado por $P_3 = 10,00 \times (1 + \frac{5}{100}) \times (1 + \frac{15}{100}) \times (1 + \frac{5}{100}) = 10,00 \times 1,05 \times 1,15 \times 1,05 = 12,68$, ou seja, $R\$ \ 12,68$.

Se um produto com preço inicial P_0 sofre descontos sucessivos, cujas taxas percentuais são $i_1, i_2, \cdots, i_n$, então o preço desse produto após n reajustes é

$$P_n = P_0 \times (1 - i_1) \times (1 - i_2) \times \cdots \times (1 - i_n),$$

em particular, se os acréscimos forem taxas percentuais iguais, isto é, $i_1 = \cdots = i_n = i$, então

$$P_n = P_0(1 - i)^n.$$

Exemplo 5

Durante um mês com alta variação nos preços de alimentos, o preço do pacote de 5 kg de arroz, que inicialmente era de $R\$\ 10,00$, sofreu descontos sucessivos de 5%, 15% e novamente de 5%. Qual o preço atual?

O preço atual é dado por $P_3 = 10,00 \times (1 - \frac{5}{100}) \times (1 - \frac{15}{100}) \times (1 - \frac{5}{100}) = 10,00 \times 0,95 \times 0,85 \times 0,95 = 7,68$, ou seja, $R\$\ 7,68$.

7.1 Exercícios

1. Calcule as porcentagens pedidas abaixo:

a) 10% de 200
b) 15% de 250
c) 5% de 60
d) 20% de 100
e) 25% de 150
f) 30% de 120
g) 12% de 40
h) 50% de 175
i) 75% de 300
j) 80% de 400
k) 90% de 10
l) 60% de 180

2. Que quantia corresponde a 30% de $R\$\ 180,00$?

a) $R\$\ 27,00$
b) $R\$\ 48,40$
c) $R\$\ 54,00$
d) $R\$\ 64,40$

3. Na sala de aula, um professor descobriu que 70% dos alunos torcem para o Atlético-MG, 10% torcem pro América-MG, 20% torcem para o Cruzeiro. Sabendo que existem 50 alunos na sala, quantos torcem para o Atlético-MG?

4. Determine a área a ser desmatada de uma região de 175 km^2 de floresta Amazônica, considerando que os órgãos de defesa do meio ambiente permitiram derrubar somente 7% da região citada.

5. Em uma escola há 900 alunos matriculados, dos quais 70% praticam esportes. Desses 55% temos que: 60% praticam futebol, 30% praticam vôlei e 10% praticam handebol. Determine o número de alunos que praticam futebol, vôlei e handebol.

6. Se 7% de um número é igual a 13, quanto é 15% deste número?

7. Quanto é 65% de 300% de 75%?

8. O aumento salarial de uma empresa de tecnologia seria de apenas 7%, mas devido à intervenção do seu sindicato, esta mesma categoria conseguiu mais 150% de aumento sobre o percentual original de 7%. Qual foi o percentual de reajuste conseguido?

9. Comprei um frango congelado que pesava $1,80\ kg$. Após o descongelamento e de ter escorrido toda a água, o frango passou a pesar apenas $1,25\ kg$. Fui lesado em quantos por cento do peso, por ter levado gelo a preço de frango?

10. Em uma cesta eu possuía uma certa quantidade de ovos. As galinhas no meu quintal botaram 20% da quantidade dos ovos que eu tinha na cesta e nela os coloquei, mas por um azar meu, um objeto caiu sobre a dita cuja e 30% dos ovos foram quebrados. Eu tenho mais ovos agora ou inicialmente?

11. A quantia de $R\$\ 1.100,00$ representa qual porcentagem de $R\$\ 2.745,00$?

12. Na compra de uma televisão obtive desconto de 10% por ter feito o pagamento à vista. Se paguei $R\$\ 2.199,00$ pela televisão, qual era o preço original?

13. Guilherme comprou uma moto e resolveu financia-lá, pois não podia pagar à vista. Sabendo que o valor à vista é de $R\$\ 4.500,00$ e que o valor total à prazo é 17% maior que o valor à vista, quanto Guilherme vai pagar no total?

14. Bárbara tem 25 anos e morou durante 8 anos nos Estados Unidos, 7 anos na Austrália e o resto no Brasil. Em porcentagem, quantos anos ela morou no hemisfério norte?

15. Luysa ganha 13% a mais que Marcus. Se Luysa ganhar um aumento de 27%, quantos porcento ela ganhará a mais que Marcus?

16. (FUVEST) Uma fazenda estende-se por dois municípios A e B. A parte da fazenda que está em A ocupa 8% da área desse município. A parte da fazenda que está em B ocupa 1% da área desse município. Sabendo-se que a área do município B é dez vezes a área do município A, a razão entre a área da parte da fazenda que está em A e a área total da fazenda é igual a

    a) $\frac{2}{9}$
    b) $\frac{3}{9}$
    c) $\frac{4}{9}$
    d) $\frac{5}{9}$
    e) $\frac{7}{9}$

17. (FUVEST) O Sr. Reginaldo tem dois filhos, nascidos respectivamente em 1/1/2000 e 1/1/2004. Em testamento, ele estipulou que sua fortuna deve ser dividida entre os dois filhos, de tal forma que:

    (1) os valores sejam proporcionais às idades;

    (2) o filho mais novo receba, pelo menos, 75% do valor que o mais velho receber.

    O primeiro dia no qual o testamento poderá ser cumprido é:

    a) 1/1/2013
    b) 1/1/2014
    c) 1/1/2015
    d) 1/1/2016
    e) 1/1/2017

18. (MACKENZIE) Quando foi admitido em uma empresa, José contratou um plano de saúde, cujo valor correspondia a 5% do seu salário. Hoje, José tem um salário 30% maior e o plano de saúde teve, desde a admissão de José, um aumento de 82%, representando, atualmente, $K\%$ do salário de José. O valor de K é

    a) 7%
    b) 8%
    c) 9%
    d) 10%
    e) 11%

19. (UFMG) Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada 4 meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é

    a) 75%
    b) 80%
    c) $83,33\%$
    d) $87,5\%$
    e) $88,9\%$

20. (FUVEST) Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:

    a) 20%
    b) 22%
    c) 24%
    d) 26%
    e) 28%

21. (ENEM 2009) Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por $3, 4, 6, 8$ ou 10 doses do medicamento, de acordo com o risco que o paciente pretende assumir. Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente?

    a) 3 doses
    b) 4 doses
    c) 6 doses
    d) 8 doses
    e) 10 doses

22. (ENEM 2000) Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número dentre dez.

    1^a opção: comprar três números para um único sorteio.
    2^a opção: comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio.
    3^a opção: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

    Escolhendo a 2^a opção, a probabilidade de o apostador não ganhar em qualquer dos sorteios é igual a:

    a) 90%
    b) 81%
    c) 72%
    d) 70%
    e) 65%

23. (UERJ) O cálculo errado da gorjeta levou os dois amigos a pagarem uma conta de $R\$\ 58,00$, quando o valor correto a ser pago deveria ser $R\$\ 18,00 + 10\%$ de $R\$\ 18,00$. Se soubessem um pouquinho de aritmética, esses clientes poderiam ter economizado, em reais, a quantia de:

    a) $36,20$
    b) $38,20$
    c) $39,00$
    d) $48,20$

24. (ENEM 2014) O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.
FORTES, G. Recuperação de pastagens é alternativa para ampliar cultivos. Folha de S. Paulo, 30 out. 2011.
De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de

    a) $32,8\%$
    b) $28,6\%$
    c) $10,7\%$
    d) $9,4\%$
    e) $8,0\%$

25. (UNIMEP) Contrariando o plano real, um comerciante aumenta o preço de um produto que custava $R\$\ 300,00$ em 20%. Um mês depois arrepende-se e faz um desconto de 20%. Sobre o preço reajustado o novo preço do produto é:

    a) $R\$\ 240,00$
    b) $R\$\ 278,00$
    c) $R\$\ 300,00$
    d) $R\$\ 288,00$
    e) n.d.a.

26. (ENEM 2016) Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupas nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala $1:8$, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento da impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%. A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente

    a) $22,00\ cm,\ 12,00\ cm$ e $5,00\ cm$
    b) $27,50\ cm,\ 15,00\ cm$ e $6,25\ cm$
    c) $34,37\ cm,\ 18,75\ cm$ e $7,81\ cm$
    d) $35,20\ cm,\ 19,20\ cm$ e $8,00\ cm$
    e) $44,00\ cm,\ 24,00\ cm$ e $10,00\ cm$

27. (ENEM 2017) Uma fábrica de papel higiênico produz embalagens com quatro rolos de 30 m cada, cujo preço para o consumidor é $R\$ \ 3,60$. Uma nova embalagem com dez rolos de 50 m cada, de mesma largura, será lançada no mercado. O preço do produto na nova embalagem deve ser equivalente ao já produzido, mas, para incentivar as vendas, inicialmente o preço de venda terá um desconto de 10%. Para que isso aconteça, o preço de venda da nova embalagem, em real, deve ser

    a) $8,10$
    b) $9,00$
    c) $9,90$
    d) $13,50$
    e) $15,00$

28. (ENEM 2016) O LIRAa, Levantamento Rápido de Índice de Infestação por Aedes aegypti, consiste num mapeamento da infestação do mosquito Aedes aegypti. O LIRAa é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação. O serviço de vigilância sanitária de um município no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAa de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

    I. 14 imóveis com focos de mosquiro em 400 imóveis no bairro
    II. 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro
    III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro
    IV. 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro
    V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro

    O setor de dedetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAa.As ações de controle iniciarão pelo bairro

    a) I
    b) II
    c) III
    d) IV
    e) V

29. (PUC-SP) Para abastecer seu estoque, um comerciante comprou um lote de camisetas ao custo de 16 reais a unidade. Sabe-se que em um mês, no qual vendeu $(40 - x)$ unidades dessas camisetas ao preço unitário de x reais, o seu lucro foi máximo. Assim sendo, pela venda de tais camisetas nesse mês, o percentual de aumento repassado aos clientes, calculado sobre o preço unitário que o comerciante pagou na compra do lote, foi de

    a) 80%
    b) 75%
    c) 60%
    d) 45%

30. (ENEM 2017) Em certa loja de roupas, o lucro na venda de uma camiseta é de 25% do preço de custo da camiseta pago pela loja, já o lucro na venda de uma bermuda é de 30% do preço de custo da bermuda, e na venda de uma calça o lucro é de 20% sobre o preço de custo da calça. Um cliente comprou nessa loja duas camisetas, cujo preço de custo foi $R\$\ 40,00$ cada uma, uma bermuda que teve preço de custo de $R\$\ 60,00$ e duas calças, ambas com mesmo preço de custo. Sabe-se que, com essa compra, o cliente proporcionou um lucro de $R\$\ 78,00$ para a loja. Considerando essas informações, qual foi o preço de custo, em real, pago por uma calça?

   a) 90
   b) 100
   c) 125
   d) 195
   e) 200

CAPÍTULO 8

Frações

Um número racional $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, é uma fração em que o número a é chamado de numerador e b é o denominador. O Numerador indica quantas partes são tomadas do inteiro e o Denominador indica em quantas partes dividimos o inteiro.

Tipo de Frações

A fração cujo numerador é menor que o denominador, é chamada **fração própria**. Por exemplo, são frações próprias $2/3, 3/4, 1/1355, \cdots$ e assim por diante.

A fração cujo numerador é maior do que o denominador, é chamada **fração imprópria**. Por exemplo, são impróprias as frações $5/3, 8/7, 13/12, \cdots$ e etc.

Fração aparente: é aquela cujo numerador é um múltiplo do denominador e aparenta ser uma fração mas não é, pois representa um número inteiro. Por exemplo, são frações aparentes os números $15/3, 15/5, 20/4, \cdots$. Como o zero é múltiplo de todo número inteiro, as frações $0/2, 0/3, 0/25$ são aparentes, pois representam o número inteiro zero.

Frações Equivalentes: São as que representam a mesma parte do inteiro. Se multiplicarmos os termos (numerador e denominador) de uma fração sucessivamente pelos números naturais, teremos um conjunto infinito de frações que constitui um conjunto que é conhecido como a classe de equivalência da fração dada. Ao invés de trabalhar com todos os elementos deste conjunto infinito, podemos tomar a fração mais simples deste conjunto que será a representante desta classe. Por exemplo, o conjunto de frações equivalentes a $1/2$ é dado por:

$$C(1/2) = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \cdots, \frac{n}{2n}, \cdots\}, n \in \mathbb{Z}.$$

Número misto: Quando o numerador de uma fração é maior que o denominador, podemos realizar uma operação de decomposição desta fração em uma parte inteira e uma parte fracionária e o resultado é denominado número misto. Vejamos os exemplos.

$$\frac{23}{8} = \frac{16+7}{8} = 2 + \frac{7}{8} = 2\frac{7}{8}, \qquad 5\frac{7}{8} = 5 + \frac{7}{8} = \frac{40+7}{8} = \frac{47}{8}$$

Simplificação de Frações

Simplificar frações é o mesmo que escrevê-la em uma forma mais simples, também chamada de forma irredutível. Isto é, uma fração para a qual o Máximo Divisor Comum entre o Numerador e o Denominador seja igual a 1,o que significa que o Numerador e o Denominador devem ser primos entre si. Tal simplificação pode ser feita através dos processos de divisão sucessiva ou fatoração.

A **divisão sucessiva** corresponde a dividir os dois termos da fração por um mesmo número (fator comum) até que ela se torne irredutível. Por exemplo,

$$\frac{48}{88} = \frac{48 \div 2}{88 \div 2} = \frac{24}{44} = \frac{24 \div 2}{44 \div 2} = \frac{12}{22} = \frac{12 \div 2}{22 \div 2} = \frac{6}{11}$$

De outra forma, poderíamos obter o máximo divisor comum (mdc) entre o númerador e o denominador e simplificar a fração diretamente por esse valor. Ou seja, $mdc(48, 88) = 8$, assim, bastava fazer

$$\frac{48 \div 8}{88 \div 8} = \frac{6}{11}.$$

Comparação de Frações

Para comparar duas frações, em geral, procedemos a redução a um denominador comum. A partir daí, a maior fração é a que possui o maior numerador. Por exemplo,

$$\frac{2}{4} < \frac{3}{4}, \ \frac{3}{11} < \frac{9}{11}, \cdots$$

Quando observarmos denominadores diferentes, para reduzir a um mesmo denominador procedemos da seguinte forma. Primeiro encontramos o mínimo múltiplo comum entre ambos os denominadores, posteriormente dividimos o valor encontrado pelo denominador de cada fração e na sequência multiplica-se o resultado pelo respectivo numerador.

Exemplo 1

Se quisermos comparar os números 2/3 e 3/5, calculamos o minímo multiplo comum entre 3 e 5, que é dado por 15. Segue daí

$$\frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{15} \quad \text{e} \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{15} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{10}{15} > \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Por fim, se os numeradores de duas frações forem iguais, será maior a fração cujo denominador for menor.

Exemplo 2

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{5}, \quad \frac{10}{15} > \frac{10}{100} \cdots$$

Divisão de Frações

A divisão de um número real $\frac{a}{b}$ por um número real $\frac{c}{d}$ é, por definição, a multiplicação do número $\frac{a}{b}$ pelo inverso de $\frac{c}{d}$ que é dado pela fração $\frac{d}{c}$, assim, temos a relação

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Leitura de frações

Fração	Leitura	Leitura Comum
1/2	Um meio	Um meio
1/3	Um terço	Um terço
1/4	Um quarto	Um quarto
1/5	Um quinto	Um quinto
1/6	Um sexto	Um sexto
1/7	Um sétimo	Um sétimo
1/8	Um oitavo	Um oitavo
1/9	Um nono	Um nono
1/10	Um dez avos	Um décimo
1/11	Um onze avos	Um onze avos
1/12	Um doze avos	Um doze avos
1/13	Um treze avos	Um treze avos
1/14	Um quatorze avos	Um quatorze avos
1/15	Um quinze avos	Um quinze avos
1/16	Um dezesseis avos	Um dezesseis avos
1/17	Um dezessete avos	Um dezessete avos
1/18	Um dezoito avos	Um dezoito avos
1/19	Um dezenove avos	Um dezenove avos
1/20	Um vinte avos	Um vigésimo
1/30	Um trinta avos	Um trigésimo
1/40	Um quarenta avos	Um quadragésimo
1/50	Um cinquenta avos	Um quinquagésimo
1/60	Um sessenta avos	Um sexagésimo
1/70	Um setenta avos	Um septuagésimo
1/80	Um oitenta avos	Um octogésimo
1/90	Um noventa avos	Um nonagésimo
1/100	Um cem avos	Um centésimo
1/1000	Um mil avos	Um milésimo
1/10000	Um dez mil avos	Um décimo de milésimo
1/100000	Um cem mil avos	Um centésimo de milésimo
1/1000000	Um milhão avos	Um milionésimo

8.1 Exercícios

1. Represente através de um desenho as frações:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{5}{6}$
f) $\frac{5}{2}$
g) $\frac{3}{7}$
h) $\frac{6}{10}$
i) $\frac{7}{11}$
j) $\frac{3}{8}$
k) $\frac{9}{13}$
l) $\frac{2}{5}$
m) $\frac{1}{7}$
n) $\frac{5}{3}$
o) $\frac{7}{2}$
p) $\frac{6}{5}$
q) $\frac{1}{5}$
r) $\frac{6}{15}$
s) $\frac{7}{3}$
t) $\frac{2}{7}$
u) $\frac{1}{13}$
v) $\frac{2}{4}$
w) $\frac{8}{5}$
x) $\frac{5}{9}$
y) $\frac{4}{12}$
z) $\frac{13}{9}$

2. Transforme as frações abaixo em frações irredutíveis:

a) $\frac{10}{2}$
b) $\frac{6}{4}$
c) $\frac{9}{6}$
d) $\frac{20}{15}$
e) $\frac{18}{12}$
f) $\frac{2}{8}$
g) $\frac{3}{6}$
h) $\frac{2}{4}$
i) $\frac{10}{30}$
j) $\frac{6}{10}$
k) $\frac{7}{56}$
l) $\frac{6}{8}$
m) $\frac{10}{6}$
n) $\frac{5}{2}$
o) $\frac{3}{7}$
p) $\frac{6}{8}$
q) $\frac{7}{11}$
r) $\frac{3}{12}$
s) $\frac{16}{6}$
t) $\frac{7}{2}$
u) $\frac{1}{10}$
v) $\frac{6}{9}$
w) $\frac{27}{24}$
x) $\frac{32}{64}$
y) $\frac{15}{20}$
z) $\frac{7}{3}$

3. Resolva.

a) $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$
c) $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$
e) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$
f) $\frac{8}{3}+\frac{1}{5}$
g) $2+\frac{1}{3}$
h) $\frac{6}{5}+\frac{5}{6}$
i) $\frac{2}{7}+3$
j) $\frac{1}{4}+\frac{3}{2}$
k) $\frac{3}{2}+\frac{9}{5}$
l) $\frac{1}{5}+5$
m) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$
n) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$
o) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$
p) $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$
q) $\frac{3}{7}-\frac{4}{5}$
r) $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$
s) $3-\frac{3}{2}$
t) $\frac{4}{3}-\frac{3}{4}$
u) $5-\frac{1}{3}$
v) $\frac{10}{3}-3$
w) $\frac{1}{4}-\frac{5}{3}$
x) $\frac{8}{3}-\frac{1}{2}$
y) $\frac{3}{2}-\frac{6}{5}$
z) $7-\frac{1}{7}$

4. Compare as frações e atribua os sinais $<, >$ ou $=$.

a) $\frac{1}{2};\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3};\frac{6}{9}$
c) $\frac{8}{2};\frac{1}{4}$
d) $\frac{10}{3};4$
e) $\frac{3}{4};\frac{1}{2}$
f) $\frac{5}{3};\frac{1}{5}$
g) $\frac{1}{2};\frac{3}{6}$
h) $\frac{7}{3};\frac{3}{7}$
i) $\frac{3}{9};\frac{4}{6}$
j) $\frac{4}{5};\frac{2}{7}$
k) $5;\frac{10}{3}$
l) $\frac{9}{15};\frac{6}{10}$
m) $\frac{27}{2};\frac{24}{5}$
n) $\frac{8}{3};\frac{3}{8}$
o) $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{2}{3}$
p) $\frac{3}{4};\frac{6}{5};\frac{2}{5}$
q) $\frac{7}{2};\frac{4}{5};\frac{14}{4}$
r) $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{5}{8}$
s) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3};\frac{4}{5}$
t) $\frac{6}{3}+\frac{1}{4};\frac{7}{2}$
u) $6-\frac{1}{6};\frac{5}{3}$
v) $\frac{7}{9}-\frac{3}{4};\frac{6}{5}$
w) $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3};\frac{2}{3}$
x) $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3};\frac{1}{7}$
y) $\frac{3}{4}\div\frac{4}{3};\frac{2}{7}$
z) $\frac{6}{5}\div\frac{10}{7};\frac{20}{7}$

5. Resolva:

a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}$

c) $\frac{2}{7} \cdot \frac{6}{5}$

d) $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3}$

e) $\frac{8}{3} \cdot \frac{2}{5}$

f) $\frac{10}{5} \cdot \frac{1}{2}$

g) $\frac{13}{2} \cdot \frac{1}{4}$

h) $\frac{8}{2} \cdot \frac{1}{4}$

i) $\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8}$

j) $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}$

k) $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4}$

l) $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5}$

m) $\frac{7}{3} \div \frac{8}{7}$

n) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$

o) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{2}$

p) $\frac{6}{5} \div \frac{4}{7}$

q) $\frac{1}{3} \div \frac{3}{4}$

r) $\frac{9}{2} \div \frac{2}{5}$

s) $\frac{4}{3} \div \frac{5}{7}$

t) $\frac{6}{7} \div \frac{3}{5}$

u) $2 \div \frac{1}{2}$

v) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$

w) $\frac{3}{4} \div 3$

x) $\frac{2}{3} \div \frac{2}{3}$

y) $\frac{1}{5} \div \frac{1}{10}$

z) $\frac{9}{4} \div \frac{3}{2}$

6. Transforme os números mistos em frações:

a) $3\frac{10}{11}$

b) $1\frac{1}{2}$

c) $4\frac{3}{4}$

d) $7\frac{2}{5}$

e) $2\frac{5}{6}$

f) $7\frac{7}{2}$

g) $10\frac{10}{2}$

h) $5\frac{4}{5}$

i) $1\frac{2}{3}$

j) $4\frac{6}{9}$

k) $1\frac{4}{7}$

l) $2\frac{3}{2}$

m) $7\frac{7}{8}$

n) $4\frac{3}{2}$

o) $6\frac{8}{9}$

p) $2\frac{3}{5}$

q) $3\frac{4}{9}$

r) $3\frac{1}{2}$

s) $10\frac{2}{5}$

t) $3\frac{3}{6}$

u) $6\frac{4}{5}$

v) $7\frac{8}{10}$

w) $4\frac{5}{4}$

x) $6\frac{8}{2}$

y) $6\frac{9}{2}$

z) $2\frac{9}{13}$

7. Tranforme as frações em números mistos:

a) $\frac{10}{2}$
b) $\frac{6}{4}$
c) $\frac{9}{6}$
d) $\frac{20}{15}$
e) $\frac{18}{12}$
f) $\frac{2}{8}$
g) $\frac{2}{5}$
h) $\frac{1}{7}$
i) $\frac{5}{3}$
j) $\frac{7}{2}$
k) $\frac{6}{5}$
l) $\frac{3}{6}$
m) $\frac{2}{4}$
n) $\frac{10}{30}$
o) $\frac{6}{10}$
p) $\frac{27}{24}$
q) $\frac{32}{64}$
r) $\frac{7}{3}$
s) $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$
t) $\frac{7}{2}+\frac{1}{8}$
u) $\frac{10}{4}-\frac{1}{8}$
v) $\frac{9}{2}-\frac{2}{3}$
w) $\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3}$
x) $\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{5}$
y) $\frac{13}{4}\div 2$
z) $\frac{64}{3}\div\frac{20}{2}$

8. Calcule o valor de x para que as frações sejam equivalentes:

a) $\frac{5}{2}=\frac{x}{2}$
b) $\frac{2}{3}=\frac{8}{x}$
c) $\frac{x}{2}=\frac{6}{4}$
d) $\frac{10}{x}=\frac{1}{2}$
e) $\frac{23}{5}=\frac{x}{6}$
f) $\frac{x}{14}=\frac{8}{7}$
g) $\frac{2x}{5}=\frac{20}{7}$
h) $\frac{6}{7}=\frac{8}{x}$
i) $\frac{13}{x}=\frac{26}{x}$
j) $\frac{6}{x}=\frac{36}{54}$
k) $\frac{16}{19}=\frac{x}{76}$
l) $\frac{x}{35}=\frac{5}{7}$
m) $\frac{x}{4}=\frac{15}{60}$
n) $\frac{27}{x}=\frac{3}{11}$
o) $\frac{35}{77}=\frac{5}{x}$
p) $\frac{x}{13}=\frac{45}{65}$
q) $\frac{24}{x}=\frac{5}{20}$
r) $\frac{3}{10}=\frac{x}{60}$
s) $\frac{29}{11}=\frac{17}{x}$
t) $\frac{35}{70}=\frac{x}{40}$
u) $\frac{120}{25}=\frac{45}{x}$
v) $\frac{1}{4}=\frac{x}{110}$
w) $\frac{3x}{20}=\frac{26}{9}$
x) $\frac{14}{7}=\frac{23}{x}$
y) $\frac{x}{5}=\frac{5}{x}$
z) $\frac{14}{3}=\frac{x}{9}$

9. Calcule:

a) $\frac{1}{2}$ de 35
b) $\frac{1}{4}$ de 16
c) $\frac{3}{4}$ de 18
d) $\frac{1}{5}$ de 125
e) $\frac{2}{5}$ de 365
f) $\frac{3}{5}$ de 25
g) $\frac{4}{5}$ de 120
h) $\frac{1}{7}$ de 49
i) $\frac{2}{7}$ de 25
j) $\frac{3}{7}$ de 67
k) $\frac{4}{7}$ de 27
l) $\frac{5}{7}$ de 24
m) $\frac{6}{7}$ de 36
n) $\frac{1}{8}$ de 176
o) $\frac{3}{8}$ de 356
p) $\frac{5}{8}$ de 428
q) $\frac{7}{8}$ de 39
r) $\frac{1}{9}$ de 315
s) $\frac{2}{9}$ de 30
t) $\frac{4}{9}$ de 38
u) $\frac{5}{9}$ de 330
v) $\frac{1}{10}$ de 1650
w) $\frac{1}{100}$ de 1200
x) $\frac{1}{1000}$ de 168000
y) $\frac{1}{10000}$ de 25
z) $\frac{1}{100000}$ de 26897413000

10. Resolva os itens:

a) $\frac{1}{2}$ de x é 5. Qual é o valor de x?
b) $\frac{3}{4}$ de x é 8. Qual é o valor de x?
c) $\frac{1}{3}$ de x é 10. Qual é o valor de x?
d) $\frac{2}{3}$ de x é 6. Qual é o valor de x?
e) $\frac{5}{2}$ de x é 15. Qual é o valor de x?
f) $\frac{1}{7}$ de x é 2. Qual é o valor de x?
g) $\frac{1}{5}$ de x é 6. Qual é o valor de x?
h) $\frac{3}{5}$ de x é 9. Qual é o valor de x?
i) $\frac{4}{3}$ de x é 16. Qual é o valor de x?
j) $\frac{2}{5}$ de x é 6. Qual é o valor de x?
k) $\frac{6}{7}$ de x é 18. Qual é o valor de x?
l) $\frac{1}{27}$ de x é 1. Qual é o valor de x?
m) $\frac{9}{13}$ de x é 0. Qual é o valor de x?
n) $\frac{1}{6}$ de x é 3. Qual é o valor de x?

o) $\frac{24}{3}$ de x é 8. Qual é o valor de x?

p) $\frac{1}{4}$ de x é 3. Qual é o valor de x?

q) $\frac{1}{9}$ de x é 5. Qual é o valor de x?

r) $\frac{5}{9}$ de x é 10. Qual é o valor de x?

s) $\frac{3}{2}$ de x é 9. Qual é o valor de x?

t) $\frac{1}{5}$ de x é 14. Qual é o valor de x?

u) $\frac{3}{7}$ de x é 6. Qual é o valor de x?

v) $\frac{4}{5}$ de x é 8. Qual é o valor de x?

w) $\frac{6}{5}$ de x é 12. Qual é o valor de x?

x) $\frac{1}{8}$ de x é 3. Qual é o valor de x?

y) $\frac{4}{9}$ de x é 24. Qual é o valor de x?

z) $\frac{2}{7}$ de x é 2. Qual é o valor de x?

11. (OBMEP 2019) Uma maneira de verificar se um número é divisível por 7 é subtrair, do número formado pelos algarismos restantes após a retirada do algarismo das unidades, o dobro do algarismo das unidades, verificando se este número é divisível por 7. Por exemplo, 336 é divisível por 7, pois $33 - 2 \times 6 = 21$ é divisível por 7, mas 418 não é pois, $41 - 2 \times 8 = 25$ deixa resto 4 na divisão por 7.

    a) Utilize este método para verificar se 4.578 é divisível por 7.

    b) Se A e B são algarismos, quantos são os números de três algarismos do tipo $AB5$ que são divisíveis por 7?

12. (OBMEP 2012) Para qualquer número positivo x dizemos que os números $x + 1$ e $\frac{x}{x+1}$ são filhos de x e que os dois são irmãos. Por exemplo, $\frac{3}{2}$ são irmãos, pois são filhos de $\frac{1}{2}$; de fato, $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$ e $\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}$

    a) Encontre um irmão de $\frac{5}{9}$.

    b) Um número pode ser filho de dois números positivos diferentes? Por que?

    c) Mostre que $\frac{1}{2008}$ é descendente de 1, isto é, ele é filho de um filho de um filho... de um filho de 1.

13. (OBMEP 2010) Qual é a ordem crescente correta das frações $\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}$ e $\frac{2}{5}$?

    a) $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{6} < \frac{4}{5} < \frac{6}{5} < \frac{4}{3}$
    b) $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{4}{5} < \frac{4}{6} < \frac{6}{5} < \frac{4}{3}$
    c) $\frac{4}{3} < \frac{4}{6} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{6}{5}$
    d) $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{4}{5} < \frac{4}{3} < \frac{4}{6} < \frac{6}{5}$
    e) $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{4}{6} < \frac{4}{3} < \frac{6}{5}$

14. (OBMEP 2010) Existem quantas frações menores do que 1, nas quais o numerador e o denominador são números inteiros positivos de um só algarismo?

15. (OBMEP 2016) Imagine as 2015 frações:
$$\frac{2}{2016}, \frac{3}{2015}, \frac{4}{2014}, \ldots, \frac{2014}{4}, \frac{2015}{3}, \frac{2016}{2}$$
    E possível escolhermos trés destas frações com produto igual a 1?

16. (OBMEP 2010) Qual é o valor do produto $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$?

    a) $\frac{119}{120}$
    b) $\frac{5}{7}$
    c) $2\frac{43}{60}$
    d) $\frac{1}{5}$
    e) $\frac{1}{120}$

17. (OBMEP 2010) Qual dos números fica entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$?

    a) $\frac{1}{6}$
    b) $\frac{4}{3}$
    c) $\frac{5}{2}$
    d) $\frac{4}{7}$
    e) $\frac{1}{4}$

18. (OBMEP 2010) A sexta parte dos alunos de uma classe usam óculos. Dentre os que usam óculos, uma terça parte são meninas; além disso, quatro meninos usam óculos. Quantos são os alunos dessa classe?

19. (OBMEP 2010) Que número se deve somar aos dois termos de uma fração para se obter o inverso dessa mesma fração?

CAPÍTULO 9

Funções e Aplicações

9.1 Pré-requisitos para o estudo de funções

Par

Denominamos *par* todo conjunto formado por dois elementos da seguinte forma:

Exemplo 1

a) $(1, 1)$;

b) $(-5, 0)$;

c) (a, b);

d) (cara, coroa).

Voltando-se ao conceito de igualdade de conjuntos, temos que, invertendo a ordem dos elementos não se obtém um novo par.

Exemplo 2

a) $(1, 3) = (3, 1)$;

b) $(-5, 0) = (0, -5)$;

c) $(a, b) = (b, a)$;

d) (cara, coroa) = (coroa, cara).

Com pares podemos resolver diversos problemas na Matemática, mas em alguns casos é necessário separar pares pela ordem dos seus elementos para se obter o resultado esperado, como exemplo um sistema de equações. Pensando no sistema abaixo,

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

temos que a solução para ele é $x = 3$ e $y = 2$, sabendo disso podemos representar a solução através do par $(3, 2)$, mas lembrando do conceito de igualdade de conjunto temos que $(3, 2) = (2, 3)$, mas sabemos que $(2, 3)$ não é uma solução para o sistema, por esse motivo introduzimos o conceito de par ordenado.

Par Ordenado

Entendemos por par ordenado um par, onde vale que:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Ou seja, não se pode inverter a ordem dos elementos, note que se $(a, b) = (b, a) \Rightarrow a = b$.

Exemplo 3

a) $(x, 3) = (2, 3) \Rightarrow\ x = 2$;

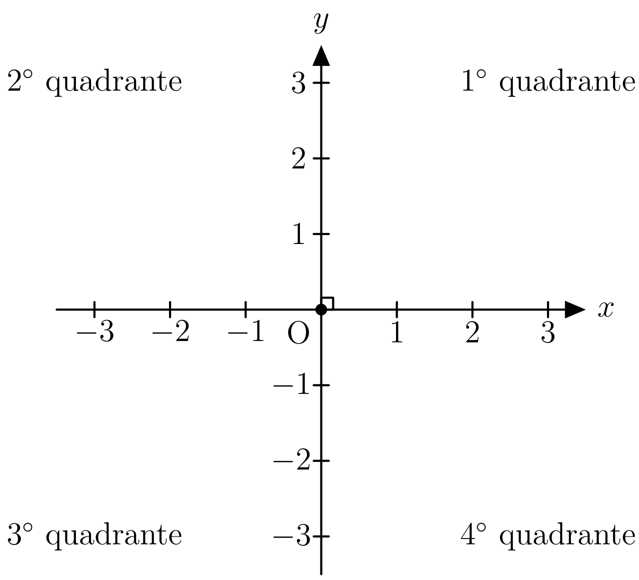
b) $(2, y) = (2, 3) \Rightarrow\ y = 3$;

c) $(x, y) = (2, 3) \Rightarrow\ x = 2$ e $y = 3$;

d) $(a + 1, b + 2) = (0, 1) \Rightarrow\ a + 1 = 0$ e $b + 2 = 1 \Rightarrow\ a = -1$ e $b = -1$.

Plano Cartesiano

Plano Cartesiano é uma forma de representação gráfica muito utilizada na Matemática. Ne um plano cartesiano temos dois eixos perpendiculares entre si que se interceptam na origem, a origem é o ponto $(0, 0)$, os pontos de um plano cartesianos são definidos através de um par ordenado onde a primeira entrada se refere ao eixo x, também denominado por eixo das abcissas, e a segunda entrada ao eixo y, também denominado eixo das ordenadas. Temos também 4 quadrantes, onde o 1° quadrante é definido em $x > 0$ e $y > 0$, o 2° definido em $x > 0$ e $y < 0$, o 3° definido em $x < 0$ e $y < 0$ e o 4° quadrante definido em $x < 0$ e $y > 0$, dessa forma temos a representação de um plano cartesiano logo abaixo.



com o plano cartesiano podemos fazer uma representação de pares ordenados através de pontos da seguinte forma:

Exemplo 4

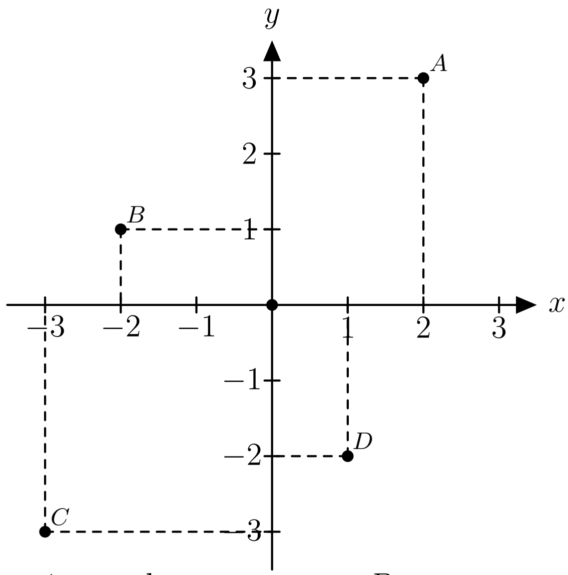
Sejam os pontos:

$A = (2, 3)$

$B = (-2, 1)$

$C = (-3, -3)$

$D = (1, -2)$



Podemos observar que o ponto A pertence ao 1º quadrante, o ponto B pertence ao 2º quadrante, o ponto C pertence ao 3º quadrante e o ponto D pertence ao 4º quadrante.

Produto Cartesiano

Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, chamamos de produto cartesiano de A por B o conjunto indicado por $A \times B$, formado por todos os pares ordenados, nos quais o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo pertence ao conjunto B:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo 5

Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ vamos determinar o produto cartesiano $A \times B$.

Forma Tabular:

Elementos de A

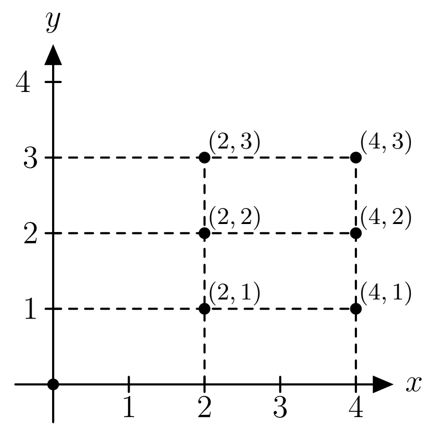
$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

Elementos de B

Exemplo 6

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$ vamos determinar o produto cartesiano $B \times A$.

Forma Gráfica:



Relação binária

Considerando dois conjunto, A e B, não vazios, chamamos de relação binária de A em B qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Por convenção, chamamos de x os elementos do conjunto A e de y os elementos do conjunto B.

Exemplo 7

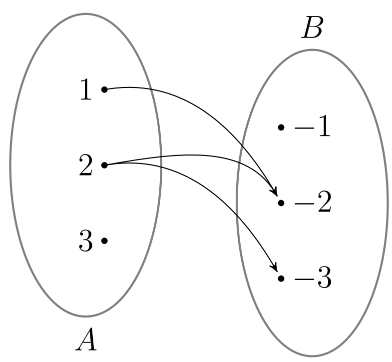
Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, -2, -3\}$ temos que:

$$A \times B = \{(1, -1), (1, -2), (1, -3), (2, -1), (2, -2), (2, -3)(3, -1), (3, -2), (3, -2)\}$$

Então uma relação binária de $A \times B$ é:

$$R = \{(1, -2), (2, -2), (2, -3)\}$$

Esta relação pode ser representada pelo *diagrama de flechas* abaixo:



O conjunto D dos primeiros elementos dos pares de R recebe o nome de *Domínio* da relação e o conjunto B, denominamos de *Contradomínio* (CD) da relação, assim, temos que o Domínio e o Contradomínio de R são:

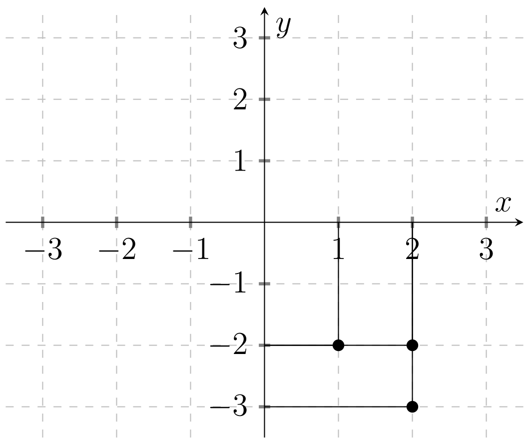
$$D = \{1, 2\}$$
$$CD = \{-1, -2, -3\}$$

Os elementos do conjunto B que participam da relação formam um conjunto denominado conjunto *Imagem* (Im), assim temos que a Imagem de R é:

$$Im = (-2, -3)$$

Gráfico cartesiano

O gráfico cartesiano dessa relação será constituído apenas pelos pontos correspondentes dos pares ordenados $(1, -2), (2, -2)$ 2 $(2, -3)$, estando cada par associado a um único ponto. No eixo das abscissas (horizontal) marcamos os elementos do conjunto A; no eixo das ordenadas (vertical), os elementos do conjunto B.



9.2 Funções

Considerando dois conjunto, A e B, não vazios e uma relação binária de A em B, dizemos que essa relação é função de A em B se, e somente se, a cada elemento x do conjunto A corresponder um único elemento y do conjunto B.

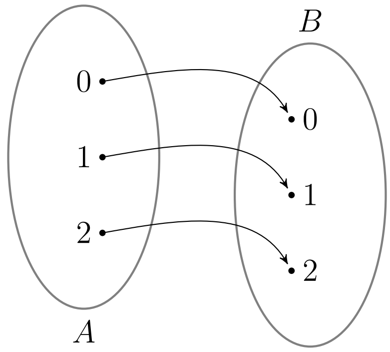
$f : A \to B$ lê-se: f é função de A em B.

Ou, no caso de ser possível escrever uma lei de correspondência através de uma expressão matemática:

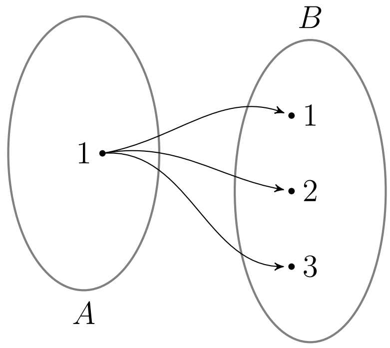
$y = f(x)$ lê-se: y é função de x, com $x \in A$ e $y \in B$.

Exemplo 8

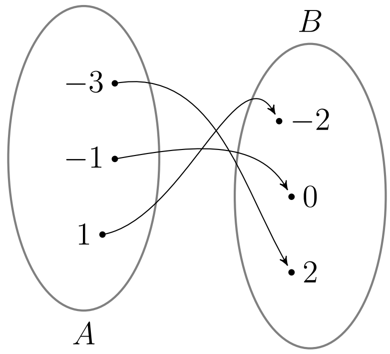
a) $R = \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$ essa relação é uma função.



b) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ essa relação não é uma função



d) $R = \{(-3,-3),(0,0),(0,1),(1,4)\}$ essa relação não é uma função.



Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Ao considerarmos uma $f : A \to B$, temos que:

- $D(f) = A$ - o domínio da função f é igual ao conjunto A.
- $CD(f) = B$ - o contradomínio da função f é igual ao conjunto B.
- $Im(f) \subset B$ - o conjunto imagem da função f está contido no contradomínio B.

O conjunto formado pelos elementos do conjunto B, que estão em correspondência com os elementos do conjunto A, recebe o nome de conjunto imagem da função f.

Imagem de um elemento

A cada elemento x pertencente ao domínio de uma função $y = f(x)$ corresponde um único valor de y do contradomínio dessa função, denominado imagem de x pela função f.

Exemplo 9

Considerando a função $f(x) = 2x^2 + 1$, temos:

- $f(1) = 2 \cdot (1)^2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$ (a imagem de 1 pela função f é $f(1) = 3$)
- $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$ (a imagem de -2 pela função f é $f(-2) = 9$)
- $f(3) = 2 \cdot (3)^2 + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 18 + 1 = 19$ (a imagem de 3 pela função f é $f(3) = 19$)

Como x representa todos os elementos do domínio da função, o seu valor varia.

Como para cada elemento x do domínio há uma imagem y no contradomínio, o valor de y também varia, e varia na dependência de x.

Daí chamamos x de variável independente e y de variável dependente.

Raiz ou zero de uma função

Dada uma função f de A em B, chamamos raiz (ou zero) da função f todo elemento de A cuja imagem é zero.

Exemplo 10

Na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x - 10$, temos:

(-2) é raiz de f pois $f(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 10$, ou seja, $f(-2) = 0$.

4 não é raiz de f, pois $f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 10$, ou seja, $f(4) \neq 0$.

5 é raiz de f pois $f(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 - 10$, ou seja, $f(5) = 0$.

Se o gráfico de uma função f tem ponto no eixo Ox, então esse ponto tem ordenada nula; logo, a abscissa dele é raiz de f.

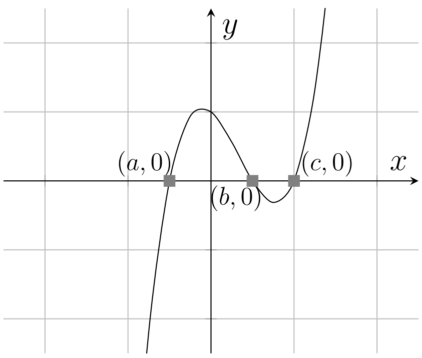


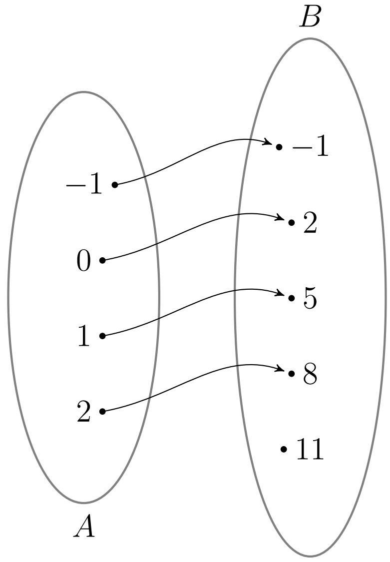
Figura 9.1: a, b e c são raízes de f

Função injetora

Seja um função f de A em B ($f : A \to B$). Se para quaisquer elementos distintos do conjunto A ($x_1 \neq x_2$) correspondem elementos distintos do conjunto B ($y_1 \neq y_2$), dizemos de a função é injetora (ou injetiva).

Exemplo 11

Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 2, 5, 8, 11\}$, vamos determinar a função $f : A \to B$ definida pela lei $y = 3x + 2$.



No diagrama de flechas, notamos que elementos distintos do conjunto A correspondem a elementos distintos do conjunto B. Então a função é injetora.

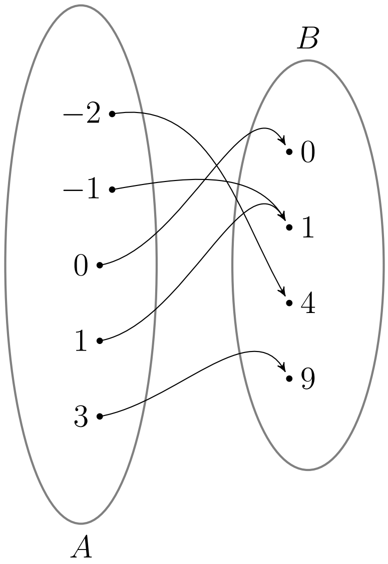
Função sobrejetora

Seja f uma função de A em B ($f : A \to B$). Dizemos que f é uma função sobrejetora (ou sobrejetiva) se o conjunto imagem for igual ao conjunto B.

$$Im(f) = B \text{ ou } Im(f) = CD(f)$$

Exemplo 12

Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ e $B = \{0, 1, 4, 9\}$, vamos determinar a função $f : A \to B$ onde $y = x^2$ para $x \in A$ $y \in B$.



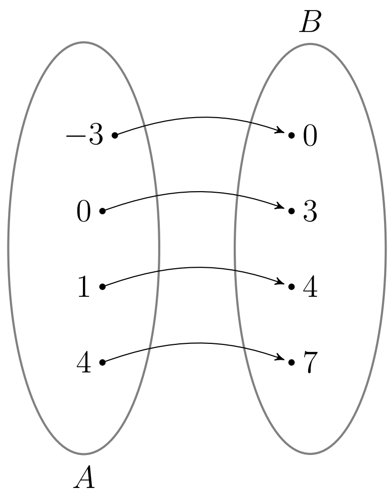
Observando o diagrama de flechas, notamos que cada elemento do conjunto B é imagem de pelo menos um elemento do conjunto A; logo, o conjunto imagem da função f é o próprio conjunto B e, portanto, a função é sobrejetora.

Função bijetora

Uma função f de A em B ($f : A \to B$) é bijetora (ou bijetiva) quando é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora. Nesse caso, para elementos distintos do conjunto A correspondem elementos distintos do conjunto B (função injetora) e $Im(f) = B$ (função sobrejetora).

Exemplo 13

Dados os conjuntos $A = \{-3, 0, 1, 4\}$ e $B = \{0, 3, 4, 7\}$, vamos determinar a função $f : A \to B$, definida pela lei $y = x + 3$ para $x \in A$ $y \in B$.



Domínio de uma função real

Consideraremos que o domínio de uma função f, $D(f)$, salvo indicação em contrário, é o subconjunto de $\mathbb{R}$, formado por todos os valores de x para os quais as operações indicadas nas expressões são possíveis, resultando em um número real. Tal função, na qual o domínio é subconjunto de $\mathbb{R}$, é chamada de função real. É possível determinar o domínio de uma função real, conhecendo apenas a lei de correspondência entre seus elementos.

Veja alguns casos notáveis:

1° caso

Quando a variável aparece no denominador de uma fração. Nesse caso, o denominador da fração deve ser diferente de zero.

Exemplo 14

Determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{3+x}{2x-5}$. Observemos que neste caso, temos como denominador o polinômio $p(x) = 2x - 5$. E para que a relação f seja uma função, devemos ter $2x - 5 \neq 0$, daí $2x \neq 5$ ou $x \neq \dfrac{5}{2}$. Nesse caso, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{5}{2}\right\}$.

2° caso

Quando a variável aparece no radicando de um radical de índice par. Nesse caso, o radicando de um radical de índice par deve ser um número maior ou igual a zero (positivo ou nulo).

Exemplo 15

Determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-6}}{5}$.
Como $2x - 6 \geq 0$ tem-se $2x \geq 6$ ou $x \geq 3$, então, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.

3° caso

Quando a variável aparece no radicando de um radical de índice par e esse radical está no denominador de uma fração. Este caso é a reunião dos dois primeiros casos; logo, o radicando deve ser maior do que zero.

Exemplo 16

Determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x+2}}$.
Como $x + 2 > 0$ tem-se $x > -2$, então, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

9.3 Função polinomial do primeiro grau

Chamamos função polinomial do 1° grau ou função afim, as funções que associam cada número real x, ao número real $ax + b$, com $a \neq 0$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = ax + b, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

.

Exemplo 17

a) $7x + 2$, onde $a = 7$ e $b = 2$

b) $13x + \dfrac{1}{2}$, onde $a = 13$ e $b = \dfrac{1}{2}$

c) $-27x$, onde $a = -27$ e $b = 0$

Função crescente

Seja uma função definida por $y = f(x)$ é dita crescente se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de um subconjunto M do domínio da função f, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Função decrescente

Seja uma função definida por $y = f(x)$ é dita decrescente se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de um subconjunto M do domínio da função f, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Características importantes da função do $1°$ grau

Conjunto domínio: o domínio da função do 1° grau é o conjunto dos números reais: $D(f) = \mathbb{R}$.

Conjunto imagem: o conjunto imagem da função do 1° grau é o conjunto dos números reais: $Im(f) = \mathbb{R}$.

Coeficiente angular: o coeficiente a é denominado coeficiente angular.

Coeficiente linear: o coeficiente b é denominado coeficiente linear.

A função do primeiro grau é *crescente* em $\mathbb{R}$ quando $a > 0$ e *decrescente* em $\mathbb{R}$ quando $a < 0$.

Exemplo 18

Para a função $f(x) = 7x + 2$:

- o coeficiente angular a é o número 7
- o coeficiente linear b é o número 2

Como $a > 0$, a função é crescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 19

Para a função $f(x) = -27x$

- o coeficiente angular é o número -27
- o coeficiente linear é o número 0

Como $a < 0$, a função é decrescente em $\mathbb{R}$.

Casos particulares

Função linear: a função polinomial do 1° grau em que o termo b é nulo $(b = 0)$ passa a ser chamada de função linear e tem a forma: $f(x) = ax$.

Exemplo 20

- $y = 7x$
- $y = \frac{5}{2}x$
- $y = -x$
- $y = \sqrt[3]{5}x$

Função identidade: a função polinomial do 1° grau em que o termo b é nulo $(b = 0)$ e $a = 1$ passa a ser chamada de função identidade e tem a forma: $f(x) = x$.

Observação:

Caso o termo a seja nulo ($a = 0$) na expressão $f(x) = ax + b \in \mathbb{R}$, a função f não é função do 1° grau, passa a ser chamada função constante e tem a forma: $f(x) = b$.

Exemplo 21

- $f(x) = 2$
- $f(x) = \sqrt{27}$
- $y = 0$
- $y = -\dfrac{2}{3}$
- $y = -13$

Raiz ou zero da função polinomial do $1°$ grau

Raiz ou zero de uma função é um valor do seu domínio cuja imagem é zero. Sendo $y = f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, temos:

$$x \text{ é zero ou raiz de } f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Assim, $ax + b = 0$ apresenta uma única solução, e $x = -\dfrac{b}{a}$ para $a \neq 0$. Ou seja, a função do 1° grau tem uma só raiz.

Exemplo 22

Seja a função $y = 3x + 9$. Para obtermos sua raiz ou zero, faremos $y = 0$.
$3x + 9 = 0 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -3$

9.4 Gráfico de uma Função do Primeiro Grau

A representação gráfica de uma função do 1° grau, $y = ax + b$ ($a \neq 0$), é uma reta não paralela aos eixos Ox ou Oy, sendo raiz ou zero da função a abscissa do ponto onde a reta intercepta o eixo Ox.

A construção do gráfico de uma função do 1° grau, $y = ax + b$, pode ser feita seguindo os dois próximos passos:

1°) Organizamos alguns valores distintos de x e os respectivos valores de y em uma tabela;

2°) Localizamos no plano cartesiano os pontos (x, y) e traçamos a reta que passa por eles.

Exemplo 23

Vamos construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$.

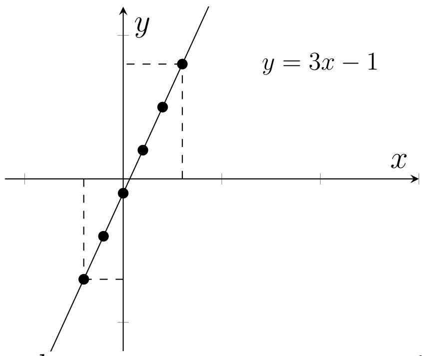
- 1° *passo:*

$$
\begin{aligned}
x &= -2 &&\Rightarrow y = 3 \cdot (-2) - 1 &&= -7\\
x &= -1 &&\Rightarrow y = 3 \cdot (-1) - 1 &&= -4\\
x &= 0 &&\Rightarrow y = 3 \cdot 0 - 1 &&= -1\\
x &= 1 &&\Rightarrow y = 3 \cdot 1 - 1 &&= 2\\
x &= 2 &&\Rightarrow y = 3 \cdot 2 - 1 &&= 5\\
x &= 3 &&\Rightarrow y = 3 \cdot 3 - 1 &&= 8
\end{aligned}
$$

x	y
-2	-7
-1	-4
0	-1
1	2
2	5
3	8

- 2° *passo:*

Pares ordenados
$(-2, -7)$
$(-1, -4)$
$(0, -1)$
$(1, 2)$
$(2, 5)$
$(3, 8)$



Como o gráfico da função do 1° grau é uma reta, observamos que sua construção pode ser feita com base em apenas dois pontos. Note que o ponto em que a reta intercepta o eixo x tem o valor de x igual a $\frac{1}{3}$, que é a raiz ou zero da função.

Casos particulares

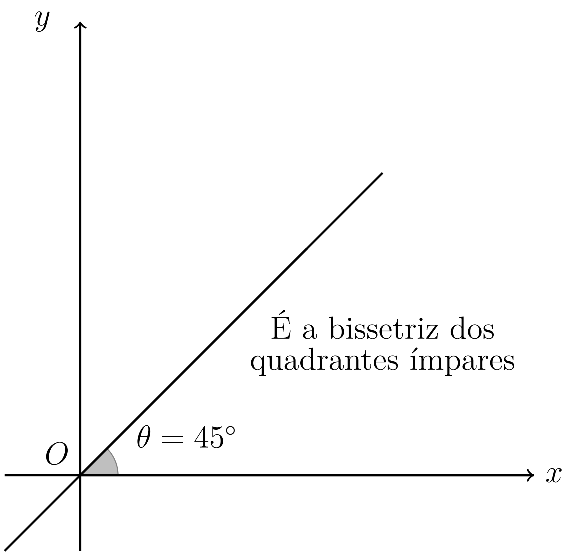


Figura 9.2: *Função Identidade* $f(x) = x$

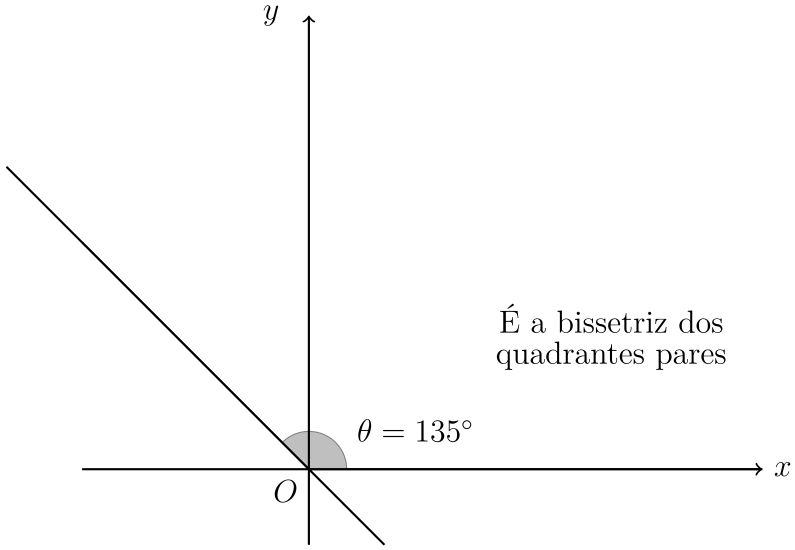
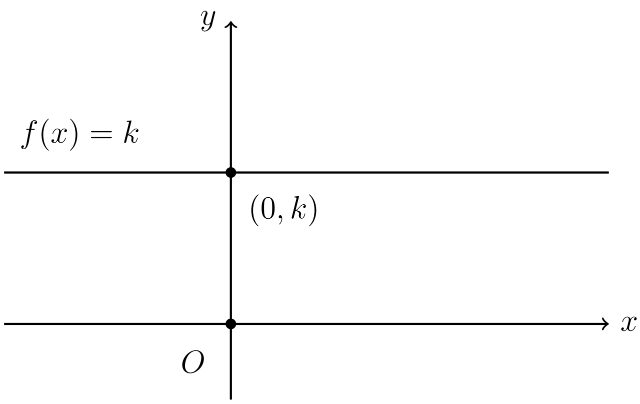


Figura 9.3: *Oposta da Função Identidade* $f(x) = -x$

♢ O gráfico de uma função constante também é uma reta, mas uma reta horizontal, isto é, uma reta paralela ao eixo Ox.



9.5 Estudo dos sinais da função do primeiro grau

O estudo dos sinais da função do 1° grau, $y = ax + b$ $(a \neq 0)$, consiste em saber para que valores de x tem-se:

i) $y > 0$ (positivo);

ii) $y = 0$ (nulo);

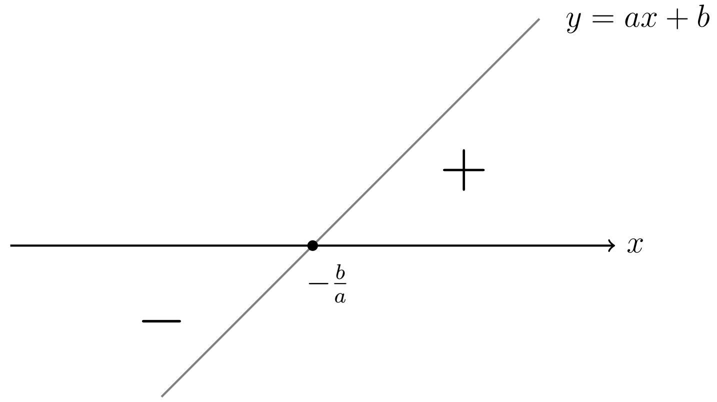
iii) $y < 0$ (negativo).

Vamos separar tal estudo em três casos.

1° caso: Função crescente

Dizemos que uma função $y = ax + b,\ a \neq 0$ é crescente se, e somente se, $a > 0$.

Esquematização:



Assim, para toda função crescente temos que

i) y assume *valores positivos* para todo $x > -\dfrac{b}{a}$;

ii) $y = 0$ para $x = -\dfrac{b}{a}$;

iii) y assume *valores negativos* para todo $x < -\dfrac{b}{a}$.

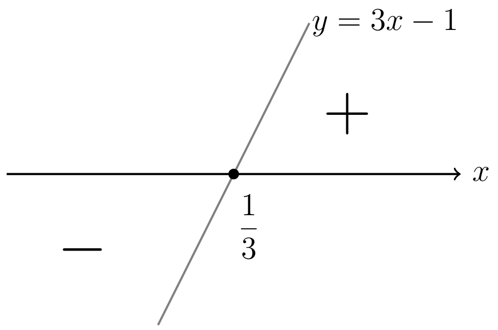
Exemplo 24

Estude os sinais da função $y = 3x - 1$

Temos que,

$$\begin{aligned} x = 0 \Rightarrow &\ \ y = 3 \cdot 0 - 1 = -1; \\ y = 0 \Rightarrow &\ \ x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Esquematizando pelo gráfico:



Notamos que:

i) Para $x > \dfrac{1}{3}$, temos $y > 0$.

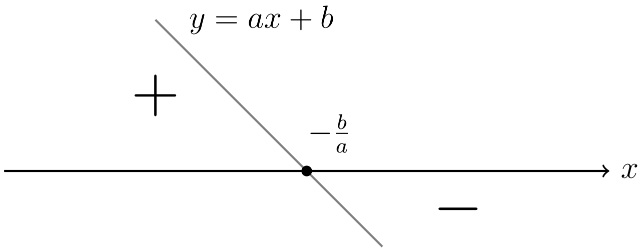
ii) Para $x = \dfrac{1}{3}$, temos $y = 0$.

iii) Para $x < \dfrac{1}{3}$, temos $y < 0$.

2° caso: Função decrescente

Dizemos que uma função $y = ax + b,\ a \neq 0$ é decrescente se, e somente se, $a < 0$.

Esquematização:



Assim, para toda função decrescente temos que

i) y assume *valores positivos* para todo $x < -\dfrac{b}{a}$;

ii) $y = 0$ para $x = -\dfrac{b}{a}$;

iii) y assume *valores negativos* para todo $x > -\dfrac{b}{a}$.

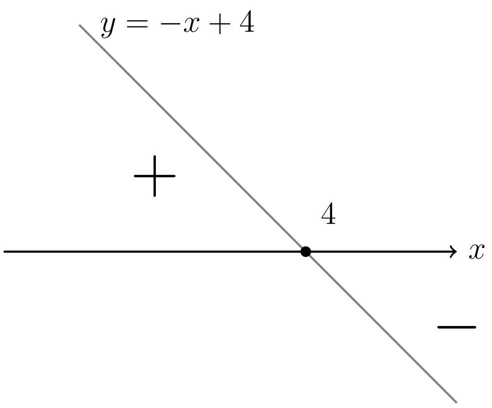
Exemplo 25

Vamos estudar os sinais da função $y = -x + 4$.

Temos que,

$$x = 0 \Rightarrow \quad y = -1 \cdot 0 + 4 = 4;$$
$$y = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{-4}{-1} = 4.$$

Esquematizando pelo gráfico:



Notamos que:

i) Para $x < 4$, temos $y > 0$.

ii) Para $x = 4$, temos $y = 0$.

iii) Para $x > 4$, temos $y < 0$.

9.6 Inequações

A resolução das inequações do 1° grau, isto é, a determinação dos valores de x que as satisfazem, pode ser feita pelo estudo de sinais de uma função do 1° grau.

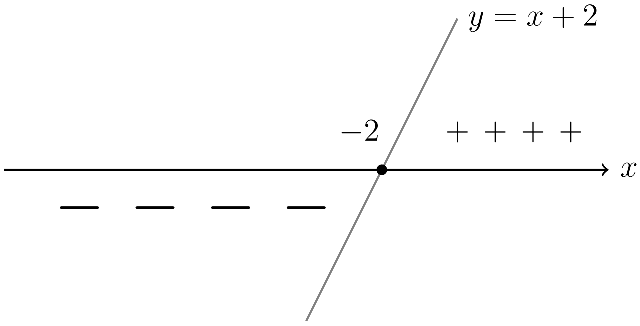
Exemplo:
Vamos resolver as inequações:

a) Consideraremos a função dada por $y = x + 2$; queremos $y > 0$.

Determinando o zero da função:

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Estudando os sinais da função:



Os valores de x para os quais $y > 0$ são aqueles que satisfazem a inequação.

Assim, temos

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

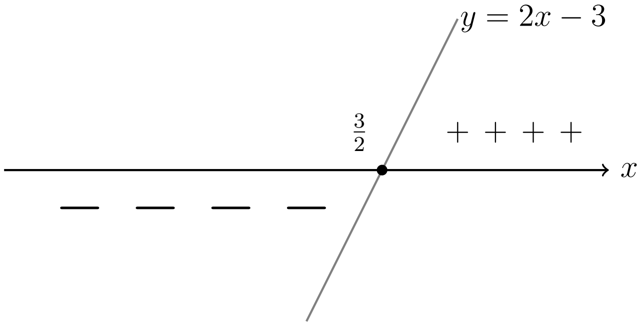
b) $2x - 3 \geq 0$

Seja $y = 2x - 3$, queremos $y \geq 0$.

Determinando o zero da função:

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Estudando os sinais da função:



Os valores de x que tornam $y \geq 0$ são aqueles que satisfazem a inequação.

Assim, temos

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \dfrac{3}{2}\}$

CAPÍTULO 10

Função Polinomial do Segundo Grau

10.1 Função quadrática

Chama-se *função quadrática* a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa, a cada número real x, o número real $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Chamamos de *Função quadrática* toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplo 1

a) $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$, em que $a = 2$, $b = 5$ e $c = 6$;

b) $f(x) = -x^2 + x - 1$, em que $a = -1$, $b = 1$ e $c = -1$;

c) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + \sqrt{5}$, em que $a = \dfrac{3}{2}$, $b = 0$ e $c = \sqrt{5}$.

10.2 Gráfico da função quadrática

Em um sistema cartesiano ortogonal, o gráfico de uma função quadrática é representado por uma curva, à qual damos o nome de *parábola*.

Exemplo 2

Vamos esboçar o gráfico da seguinte função quadrática

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Atribuímos valores para x e obtemos valores para y, organizando-os com o auxílio de uma tabela.

x	y
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

Figura 10.1: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Exemplo 3

A seguir, vamos esboçar o gráfico da função quadrática $y = -x^2 + 2x + 3$.

x	y
-2	-5
-1	0
0	3
1	4
2	3
3	0
4	-5

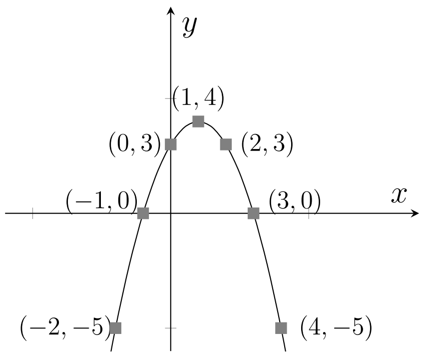
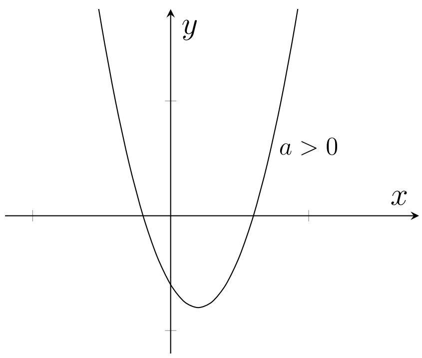
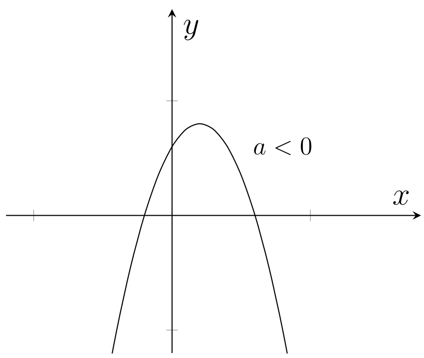


Figura 10.2: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

Relação entre a concavidade e o coeficiente a

O gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola, e essa parábola terá a *concavidade voltada para cima* quando $a > 0$ e terá a *concavidade voltada para baixo* quando $a < 0$.





10.3 Raízes ou zeros da função quadrática

A construção do gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com o auxílio de uma tabela de valores para x e y, como procedemos anteriormente, é um trabalho impreciso e trabalhoso. Para encontrarmos uma maneira mais simples, vejamos como calcular os zeros da função quadrática. Para isso, vamos transforma-la em uma forma mais conveniente, denominada forma canônica.

$$\begin{aligned} f(x) =& ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ =& a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Considere $\Delta = b^2 - 4ac$, segue que a forma canônica é dada por

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Agora, para encontrar os zeros da função quadrática basta fazer $f(x) = 0$, segue que então

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Utilizando a forma canônica, temos que:

$$\begin{gathered} ax^2 + bx + c \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{gathered}$$

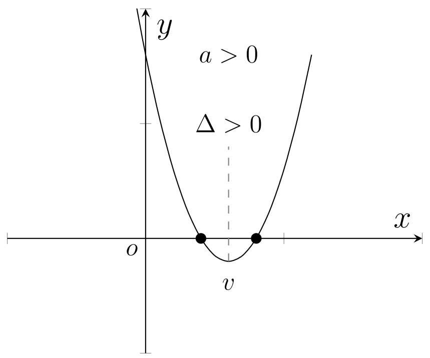
Para fazer referência a essas raízes, costumamos usar símbolos tais como $x^{'}$ e $x^{''}$ ou x_1 e x_2, ou seja,

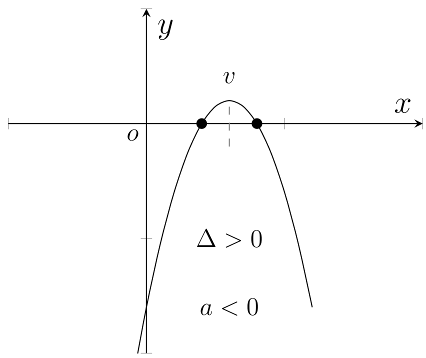
$$x^{'} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x^{''} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Note que, a existência de raízes reais para a equação de segundo grau fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$. Assim, temos três casos a considerar:

1°) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes reais que são

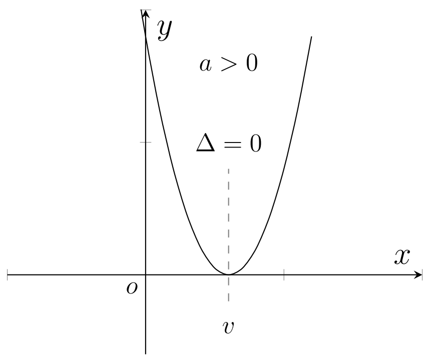
$$x^{'} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x^{''} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

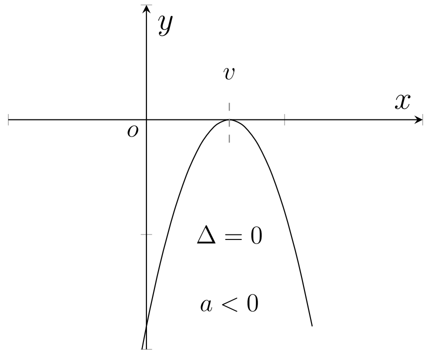




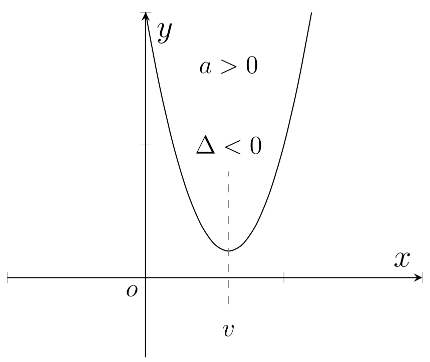
2°) $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais que são

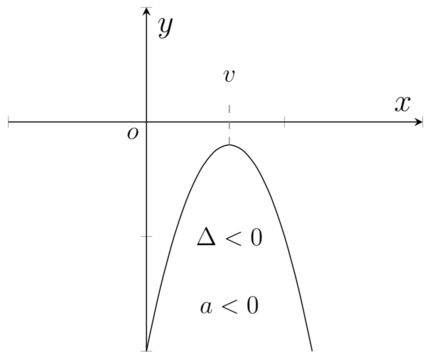
$$x^{'} = x'' = \frac{-b}{2a}.$$





3º) $\Delta < 0$, como não existe solução para $\sqrt{\Delta} = 0$, dizemos que a equação não possui raízes reais.





10.4 Vértice da parábola

O vértice V de uma parábola é representado pelo ponto de intersecção do eixo de simetria com a própria parábola. As coordenadas do vértice são:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Justificando as coordenadas do vértice

Sendo a abscissa do vértice a média aritmética entre as raízes $x^{'}$ e $x^{''}$, então:

$$
\begin{aligned}
x_v &= \frac{x^{'} + x^{''}}{2} \\
x_v &= \frac{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} \\
x_v &= \frac{\dfrac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}}{2} \\
x_v &= \frac{-\dfrac{2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a} \\
x_v &= -\frac{b}{2a}
\end{aligned}
$$

A obtenção da ordenada do vértice y_v é feita substituindo $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ à quadrática $y = ax^2 + bx - c$.

$$
\begin{aligned}
y_v &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
y_v &= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
y_v &= \frac{b^2 - 2b + 4ac}{4a} \\
y_v &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \\
y_v &= -\frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}
$$

Estando a concavidade da parábola voltada para cima $(a > 0)$, a função assume um *valor mínimo*, que é o valor $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Estando a concavidade da parábola voltada para baixo $(a < 0)$, a função assume um *valor máximo*, que é o valor $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Observe que o ponto de intersecção da curva com o eixo y tem como coordenadas $(0, c)$, ou seja: $x = 0 \Rightarrow y = c$.

10.5 Exercícios

1. Encontre os valores das variáveis para que os pares, sejam pares ordenados:

   a) $(a,\ 1) = (4,\ 1)$
   b) $(2,\ b) = (2,\ 1)$
   c) $(10,\ 7) = (c,\ 7)$
   d) $(11,\ 3) = (11,\ d)$
   e) $(2x,\ 6) = (3,\ 6)$
   f) $(5,\ 3y) = (5,\ 9)$
   g) $(x,\ 2x) = (3,\ 6)$
   h) $(4,\ x) = (2x,\ 2)$
   i) $(x,\ y) = (13,\ 27)$
   j) $(2x,\ 3y) = (10,\ 18)$
   k) $(7,\ x) = (y,\ 5)$
   l) $(12,\ 6) = (9,\ 6x)$
   m) $(x^2,\ y) = (121,\ 8)$
   n) $(2x^2,\ 10) = (18,\ 10)$
   o) $(x + y,\ 10) = (5,\ x - y)$
   p) $(x \cdot y,\ 5) = (6,\ x + y)$
   q) $(2x + 3y,\ x - y) = (18,\ 3)$

2. Faça um plano cartesiano, para cada item abaixo, e localize os pontos.

   a) $A = (2, 1), B = (1, 2), C = (0, 0), D = (-1, -3), E = (-3, 2)$
   b) $A = (0, 6), B = (6, 0), C = (6, 6), D = (3, 3), E = (-3, 3)$
   c) $A = (5, 2), B = (0, -4), C = (-3, 1), D = (1, -3), E = (4, -2)$
   d) $A = (7, 5), B = (2, 3), C = (4, 1), D = (-2, -6), E = (-1, 6)$
   e) $A = (2, 4), B = (6, 3), C = (10, -2), D = (7, 7), E = (2, 7)$
   f) $A = (4, 5), B = (1, -3), C = (-4, 3), D = (3, -2), E = (-4, 5)$
   g) $A = (7, 1), B = (6, 5), C = (4, 1), D = (-7, 8), E = (-5, -2)$
   h) $A = (5, 6), B = (4, 8), C = (-1, 2), D = (-5, 3), E = (-2, -3), G = (-1, -5), H = (-4, -4)$
   i) $A = (2, 3), B = (4, 7), C = (-5, 2), D = (-4, -1), E = (3, 2), G = (3, -4), H = (1, -1)$
   j) $A = (2, 1), B = (-3, -4), C = (3, -2), D = (-3, 4), E = (-2, -3), G = (5, 7), H = (-6, -3)$
   k) $A = (0, 5), B = (5, 0), C = (5, 5), D = (-3, -2), E = (4, -6), G = (2, 3), H = (-7, 1)$
   l) $A = (2, -3), B = (-4, 3), C = (2, -1), D = (0, -3), E = (2, 2), G = (1, 0), H = (-4, 0)$
   m) $A = (2, 7), B = (2, 4), C = (2, 0), D = (0, 3), E = (2, 5), G = (2, 1), H = (-6, -2)$
   n) $A = (3, 4), B = (1, 0), C = (7, -6), D = (2, 3), E = (1, -2), G = (-4, 0), H = (-2, -2)$

3. Sendo os conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{-3, -2, -1, 0\}, C = \{-10, 0, 10, 20\}, D = \{2, 3, 5, 7\}$$

Escreva os produtos cartesianos pedidos:

a) $A \times B$
b) $B \times D$
c) $A \times C$
d) $C \times D$
e) $A \times D$
f) $B \times C$
g) $B \times A$
h) $D \times B$
i) $C \times A$
j) $D \times C$
k) $D \times A$
l) $C \times B$

4. Estabeleça o domínio, contradomínio e a imagem das relações dos produto cartesiano $A \times B$ onde os conjuntos A e B são:

$$A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$$

a) $R = \{(0, 2), (1, 3), (2, 5)\}$
b) $R = \{(-5, 5), (-3, 3), (4, 7)\}$
c) $R = \{(1, 2), (3, 2), (0, 2)\}$
d) $R = \{(-5, 2), (-2, 3), (1, 5), (3, 7), (5, 9)\}$
e) $R = \{(0, 2), (1, 2), (1, 3), (3, 3), (3, 5)\}$
f) $R = \{(1, 2), (3, 3), (4, 5), (-3, 9), (2, 7)\}$
g) $R = \{(-4, 7), (0, 3), (2, 2), (5, 5), (-3, 9)\}$

5. Sabendo dos conjuntos abaixo faça o que se pede:

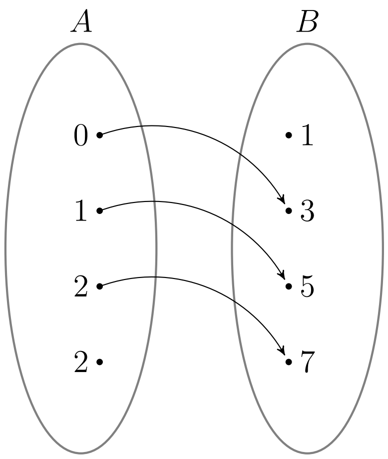
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

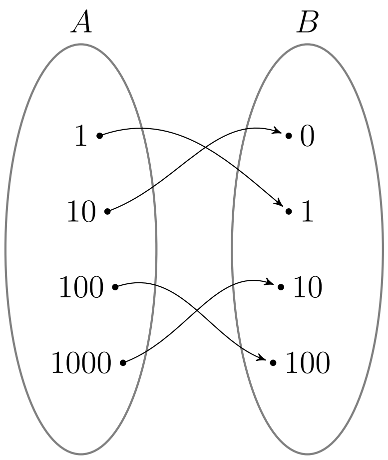
a) Faça uma relação binária de $A \times B$.
b) Faça uma relação binária de $B \times A$
c) Faça uma função de $A \times B$
d) Faça uma função de $B \times A$
e) Faça uma função sobrejetora de $A \times B$
f) Faça uma função sobrejetora de $B \times A$
g) Faça uma função injetora de $A \times B$
h) Faça uma função injetora de $B \times A$
i) Faça uma função bijetora de $A \times B$
j) Faça uma função bijetora de $B \times A$

6. Escreva as relações de acordo com os diagramas de flechas:

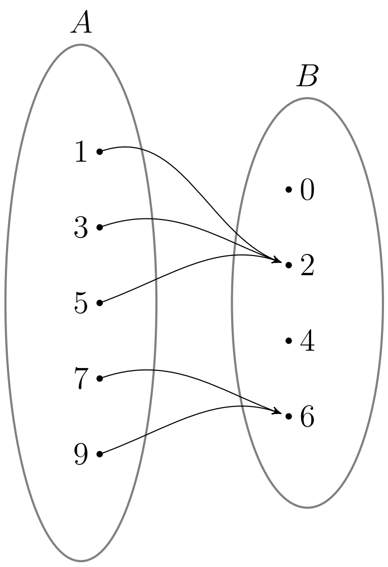
a)



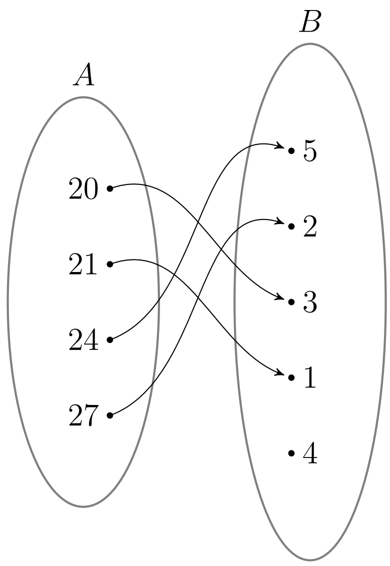
b)



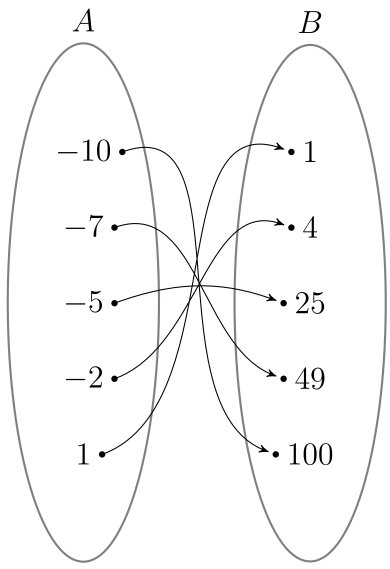
c)



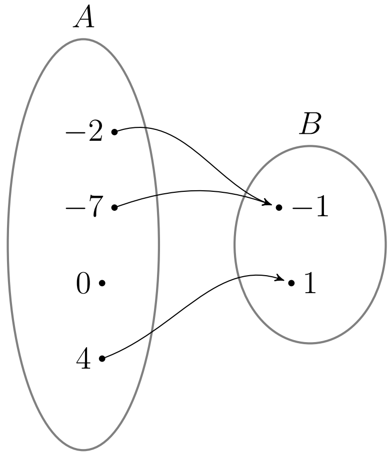
d)



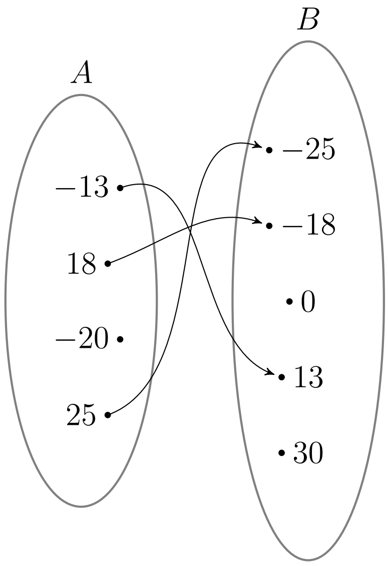
e)



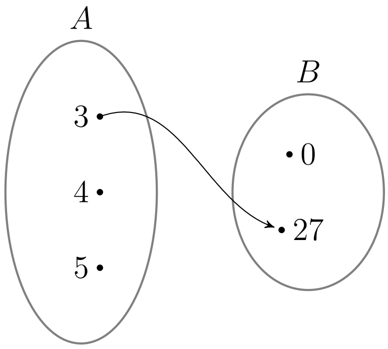
f)



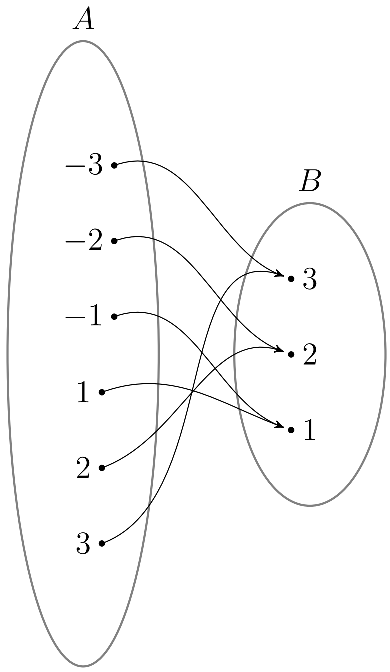
g)



h)



i)



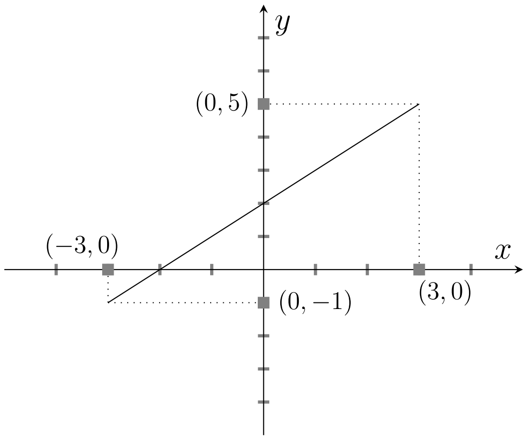
7. Encontre as raízes das funções abaixo:

a) $y = 2x + 3$
b) $y = x + 3$
c) $y = 6x + 3$
d) $y = 5x$
e) $y = -3x + 2$
f) $y = -2x + 8$
g) $y = \frac{1}{2}x + 7$
h) $y = -\frac{3}{2}x + 5$
i) $y = 2x + 2$
j) $y = -3x + 12$
k) $y = x + 10$

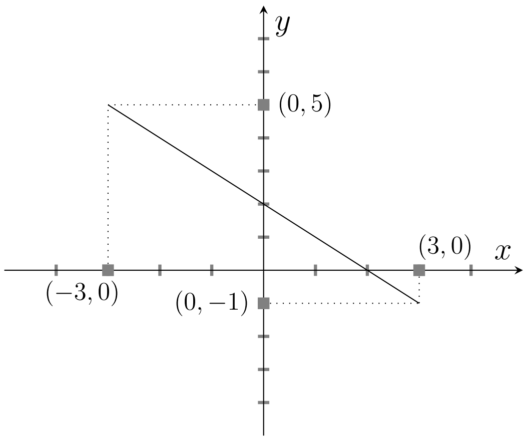
8. Esboce os gráficos das funções de 1° grau abaixo:

a) $y = x$
b) $y = -x$
c) $y = 2x$
d) $y = x + 2$
e) $y = 3x + 2$
f) $y = \frac{1}{2}x$
g) $y = \frac{1}{2}x + 3$
h) $y = 5x + 2$
i) $y = -2x$
j) $y = -3x - 2$
k) $y = -\frac{1}{2}x$

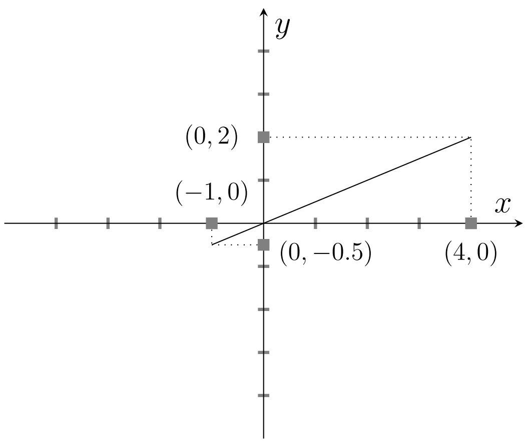
9. Escreva o domínio, contradomínio, imagem e a função de cada gráfico abaixo:



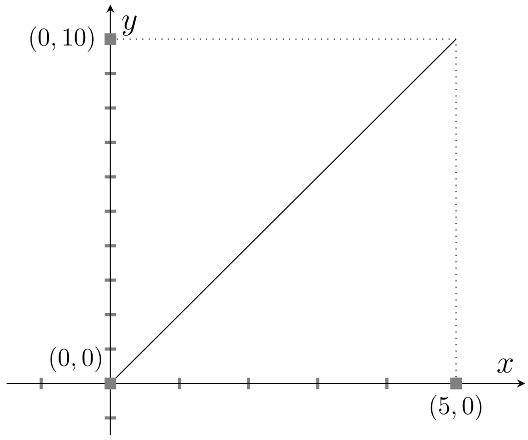
a)



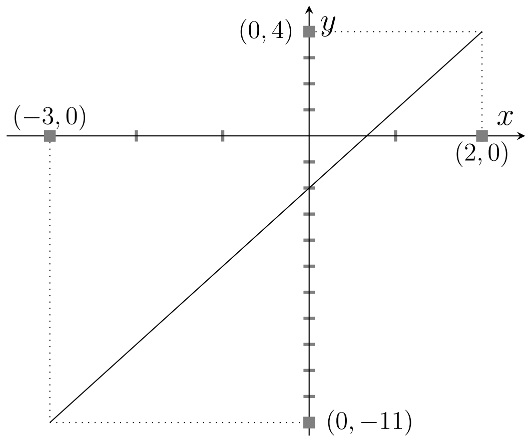
b)



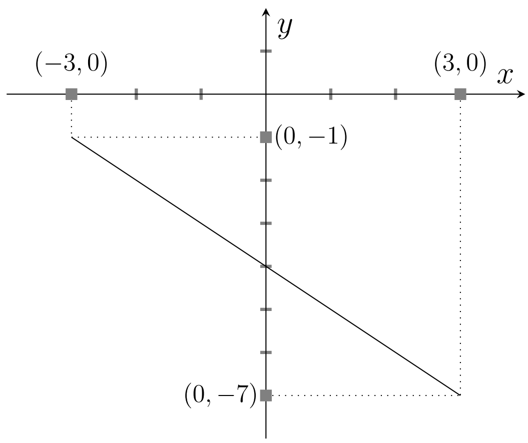
c)



d)



e)



f)

10. (ENEM 2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$$Q_O = -20 + 4P$$
$$Q_D = 46 - 2P$$

em que Q_O é a quantidade de oferta e Q_D é a quantidade de demanda e P é preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5
b) 11
c) 13
d) 23
e) 33

11. (FGV) O gráfico da função $f(x) = mx + n$ passa pelos pontos (˘1, 3) e $(2, 7)$. O valor de m é:

a) $\frac{5}{3}$
b) $\frac{4}{3}$
c) 1
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{3}{5}$

12. (PUC-MG) Preparando-se para a Volta Internacional da Pampulha, que mede 17.800 m, certo atleta treina diariamente e, a cada dia, corre 150 m a mais do que no dia anterior. Nesse ritmo, no décimo segundo dia, ele corre um total de 3.650 m. A partir dessas informações, pode-se estimar que, para estar em condições de cumprir essa prova, esse atleta deverá treinar, no mínimo, durante:

a) 107 dias
b) 110 dias
c) 113 dias
d) 116 dias

13. (UFLA) Um carro percorre 10 quilômetros com 1 litro de gasolina e 7 quilômetros com 1 litro de álcool. Se o preço do litro de gasolina é de $R\$ \ 2,50$, o valor do litro de álcool para o qual é indiferente utilizar álcool ou gasolina é de:

   a) $R\$ \ 1,75$
   b) $R\$ \ 1,80$
   c) $R\$ \ 1,70$
   d) $R\$ \ 1,90$

14. (CEFET-MG) Os preços dos ingressos de um teatro nos setores 1, 2 e 3 seguem uma função polinomial do primeiro gau crescente com a numeração dos setores. Se o preço do ingresso no setor 1 é de $R\$ \ 120,00$ e no setor 3 é de $R\$400,00$, então o ingresso no setor 2 em reais, custa

   a) 140
   b) 180
   c) 220
   d) 260

15. (ENEM 2017) Uma empresa de entregas presta serviços para outras empresas que fabricam e vendem produtos. Os fabricantes dos produtos podem contratar um entre dois planos oferecidos pela empresa que faz as entregas. No plano A, cobra-se uma taxa fixa mensal no valor de $R\$ \ 500,00$, além de uma tarifa de $R\$ \ 4,00$ por cada quilograma enviado (para qualquer destino dentro da área de cobertura). No plano B, cobra-se uma taxa fixa mensal no valor de $R\$ \ 200,00$, porém a tarifa por cada quilograma enviado sobe para $R\$ \ 6,00$. Certo fabricante havia decidido contratar o plano A por um período de 6 meses. Contudo, ao perceber que ele precisará enviar apenas 650 quilogramas de mercadoria durante todo o período, ele resolveu contratar o plano B. Qual alternativa avalia corretamente a decisão final do fabricante de contratar o plano B?

   a) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo $R\$ \ 500,00$ a menos do que o plano A custaria.
   b) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo $R\$ \ 1.500,00$ a menos do que o plano A custaria.
   c) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo $R\$ \ 1.000,00$ a mais do que o plano A custaria.
   d) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo $R\$ \ 1.300,00$ a mais do que o plano A custaria.
   e) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo $R\$ \ 6.000,00$ a mais do que o plano A custaria.

16. (Espcex 2012) Considere as funções reais $f(x) = 3x$ de domínio $[4, 8]$ e $g(y) = 4y$ de domínio $[6, 9]$, os valores máximo e mínimo que o quociente $\frac{f(x)}{g(y)}$ pode assumir são, respectivamente

   a) $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$
   b) $\frac{1}{3}$ e 1
   c) $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$
   d) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{3}$
   e) 1 e $\frac{1}{3}$

17. (UEL) Se uma função f, do primeiro grau, é tal que $f(1) = 190$ e $f(50) = 2052$, então $f(20)$ é igual a:

   a) 901
   b) 909
   c) 912
   d) 937
   e) 981

18. (UFPI) A função real de variável real, definida por $f(x) = (3\check{\ }2a)x + 2$, é crescente quando:

   a) $a > 0$
   b) $a < \frac{3}{2}$
   c) $a = \frac{3}{2}$
   d) $a.\frac{3}{2}$
   e) $a < 3$

19. Encontre as raízes das funções abaixo:

   a) $y = x^2 + x - 2$
   b) $y = x^2 - 9$
   c) $y = 2x^2 + 3x + 6$
   d) $y = 13x^2$
   e) $y = -3x^2 + 4x + 9$
   f) $y = x^2 + 7$
   g) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5$
   h) $y = 5x^2 + 5x + 5$
   i) $y = 7x^2 + 14$
   j) $y = 12x^2 + 3x + 4$
   k) $y = x^2 + 25$

20. Esboce os gráficos das funções abaixo:

a) $y = x^2$

b) $y = -x^2$

c) $y = 2x^2$

d) $y = x^2 + 5$

e) $y = x^2 + x$

f) $y = x^2 + x + 3$

g) $y = \frac{1}{2}x^2$

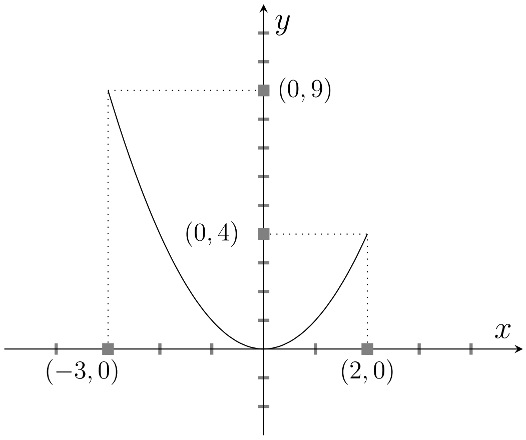
h) $y = \frac{1}{2}x^2 + 5$

i) $y = x^2 + x - 2$

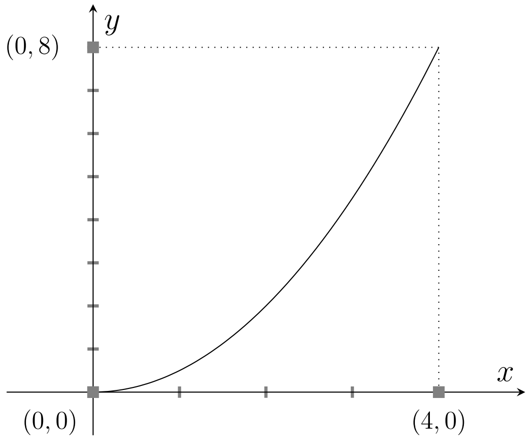
j) $y = 3x^2 - 3x + 3$

k) $y = -2x^2 - 4$

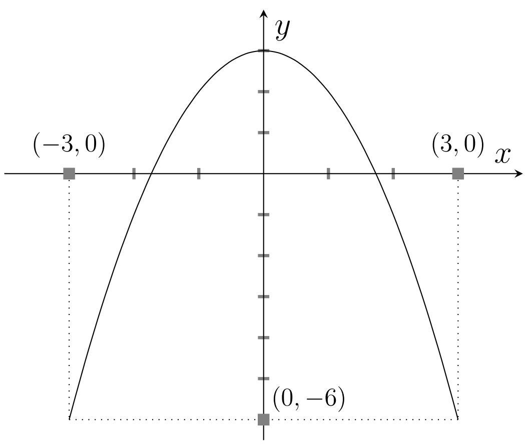
21. Escreva o domínio, contradomínio, imagem e a função de cada gráfico de função de 2° grau:



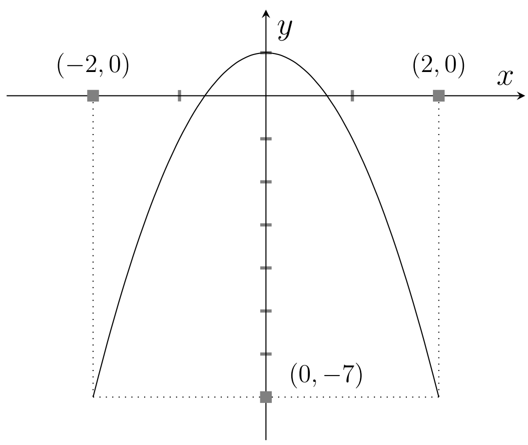
a)



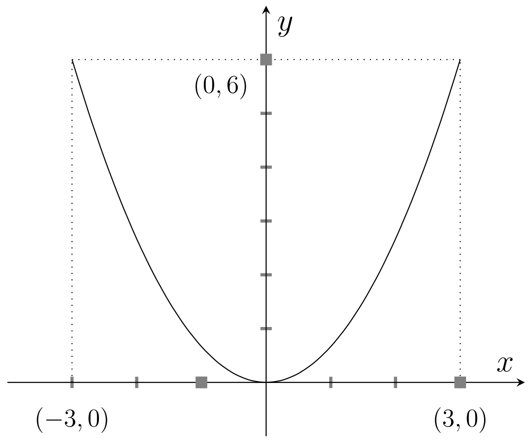
c)



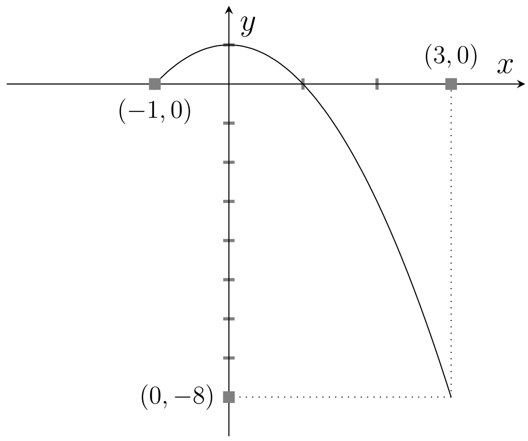
b)



d)



e)



f)

22. (ENEM 2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expressão em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretária de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

   a) 19° dia
   b) 20° dia
   c) 29° dia
   d) 30° dia
   e) 60° dia

23. (PUC-RJ) Sejam f e g funções reais dadas por $f(x) = 2 + x^2$ e $g(x) = 2 + x$. Os valores de x tais que $f(x) = g(x)$ são:

   a) $x = 0$ ou $x = -1$
   b) $x = 0$ ou $x = 2$
   c) $x = 0$ ou $x = 1$
   d) $x = 2$ ou $x = -1$
   e) $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

24. (ENEM 2016) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$$y = 9\breve{}x^2,$$

sendo x e y medidos em metros. Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18
b) 20
c) 36
d) 45
e) 54

25. (ENEM 2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de $39\ C$. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) $19,0$
b) $19,8$
c) $20,0$
d) $38,0$
e) $39,0$

26. (UFTM) As funções $f(x)$ e $g(x)$ são funções quadráticas reais, tais que: $f(x) = x^2 + 2x + 2$ e $g(x) = -x^2 - 2x - 2$. Considerando que os gráficos de $f(x)$ e de $g(x)$ são simétricos em relação ao eixo das abcissas; pode-se afirmar que a distância entre seus vértices é:

a) 1
b) $\sqrt{2}$
c) 2
d) 3
e) $2\sqrt{3}$

27. (ULBRA) Preocupados com o lucro da empresa VXY, os gestores contrataram um matemático para modelar o custo de produção de um dos seus produtos. O modelo criado pelo matemático segue a seguinte lei: $C = 15000 - 250n + n^2$, onde C representa o custo, em reais, para se produzirem n unidades do determinado produto. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo?

    a) -625
    b) 125
    c) 1245
    d) 625
    e) 315

28. (FUVEST) O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + c$, onde b e c são constantes, passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 2)$. Então $f(-\frac{2}{3})$ vale:

    a) $-\frac{2}{9}$
    b) $\frac{2}{9}$
    c) $-\frac{1}{4}$
    d) $\frac{1}{4}$
    e) 4

29. (IFCE) Sabendo-se que a expressão $(ax^2 + bx + c)$. onde a, b e c são números reais, é positiva para qualquer x real, é correto afirmar-se que:

    a) $a > 0$ e $b^2 > 4ac$
    b) $a > 0$ e $b^2 < 4ac$
    c) $a < 0$ e $b^2 > 4ac$
    d) $a < 0$ e $b^2 < 4ac$
    e) $a < 0$ e $b^2 \leq 4ac$

30. (UCS) A relação entre a quantidade em oferta de determinado produto e o seu preço quando este for x reais por unidade é dada pela equação $q = x^2 + 3x - 70$. Já a procura por esse produto (quantidade que os consumidores estão dispostos a comprar), quando o preço for x reais, é dada pela equação $d = 410 - x$. O equilíbrio no mercado ocorre quando q e d são iguais. Sendo x_0 o preço e y_0 a quantidade quando ocorre o equilíbrio o valor de $y_0 - x_0$ é

    a) 366
    b) 390
    c) 370
    d) 410
    e) 414

Bibliografia

[FS05] Filho, B. B. e Silva, C. X. *Matemática - Aula por Aula*. FTD, 2005.

[Iez13] Iezzi, G. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 6*. 8ª ed. Atual, 2013.

[IHD13] Iezzi, G., Hazzan, S. e Degenszajn. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 11*. 2ª ed. Atual, 2013.

[IM13] Iezzi, G. e Murakami, C. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 1*. 9ª ed. Atual, 2013.

[Sod10] Sodré, U. *Matemática Essencial*. UEL, 2010.

[Vas16] Vasconcelos, L. *O ALGEBRISTA - Volume 1*. LVC, 2016.