COOPERATIVISMO

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Janderson Damaceno dos Reis

Kaio Expedito Rodrigues Queiroz

UFV Universidade Federal de Viçosa

cead UFV Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância

Universidade Federal de Viçosa

Reitor
Demetrius David da Silva

Vice-Reitora
Rejane Nascentes

Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância

Diretor
Francisco de Assis de Carvalho Pinto

Campus Universitário, 36570-900, Viçosa/MG
Telefone: (31) 3612 1260

Layout: Maria Gabriela Matos

Editoração Eletrônica: Ana Luísa Medeiros

Edição de conteúdo e CopyDesk: João Batista Mota

Significado dos ícones da apostila

Para facilitar o seu estudo e a compreensão imediata do conteúdo apresentado, ao longo de todas as apostilas, você vai encontrar essas pequenas figuras ao lado do texto. Elas têm o objetivo de chamar a sua atenção para determinados trechos do conteúdo, com uma função específica, como apresentamos a seguir.

Texto-destaque: são definições, conceitos ou afirmações importantes às quais você deve estar atento.

Glossário: Informações pertinentes ao texto, para situá-lo melhor sobre deter minado termo, autor, entidade, fato ou época, que você pode desconhecer.

SAIBA MAIS! Se você quiser complementar ou aprofundar o conteúdo apresentado na apostila, tem a opção de links na internet, onde pode obter vídeos, sites ou artigos relacionados ao tema.

Para refletir: são momentos para você refletir sobre os aspectos apontados, relacionando-os com a sua prática profissional e cotidiana.

Sumário

APRESENTAÇÃO 5

FLUXO DE CAIXA 6

- EXERCÍCIOS DE FLUXO DE CAIXA 9

JUROS 11

- INTRODUÇÃO 11
- EXERCÍCIO: INTRODUÇÃO 11
- JUROS SIMPLES 12
- EXERCÍCIOS JUROS SIMPLES 18
- JUROS COMPOSTOS 20
- EXERCÍCIOS JUROS COMPOSTOS 27
- COMPARAÇÃO ENTRE JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS 29
- EXERCÍCIOS 30

TAXAS DE JUROS 32

- CONVERSÃO DE TAXA NOMINAL PARA TAXA EFETIVA 32
- CONVERSÃO ENTRE TAXAS EFETIVAS 34
- EXERCÍCIOS: TAXA DE JUROS 37
- TAXA DE JUROS CONSIDERAÇÕES PARA JUROS SIMPLES 39

DESCONTO COMERCIAL 42

- EXERCÍCIOS: DESCONTO COMERCIAL 44

SÉRIES UNIFORMES: PAGAMENTOS 46

- EXERCÍCIOS: SÉRIES UNIFORMES - PAGAMENTOS 49

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO 50

- EXERCÍCIOS: SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO 60

ESTRATÉGIA DE VENDAS: OS JUROS NO SEU DIA A DIA 62

- EXERCÍCIOS: ESTRATÉGIA DE VENDAS - OS JUROS NO SEU DIA A DIA 62

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS 64

REFERÊNCIAS 68

ANEXO A: EQUAÇÕES: JUROS COMPOSTOS 70

ANEXO B: EQUAÇÃO: CONVERSÃO DA TAXA NOMINAL PARA EFETIVA 74

ANEXO C : EQUAÇÕES: CONVERSÃO ENTRE TAXAS EFETIVAS 76

Apresentação

Nesta disciplina serão abordados conteúdos relacionados a finanças, em destaque para Matemática Financeira. Serão apresentados os conteúdos básicos de matemática financeira, tais como: juros simples e composto, equivalência de taxas, sistemas de amortização e métodos de avaliação de projetos.

O objetivo é proporcionar aos alunos um conhecimento básico, prático e teórico dos tópicos mais relevantes da matemática financeira. Alinhando conhecimento, com a vivencia diária dos alunos, em situações de uso da matemática financeira. Além do uso de planilhas eletrônicas como ferramenta de cálculos.

Todas os capítulos do material, tratarão o assunto de forma acessível, procurando explorar a curiosidade do aluno com exercícios propostos e resolvidos. De forma que o aluno possa compreender e colocar em prática o conteúdo aprendido.

Bons estudos!

Os autores.

1

Fluxo de caixa

1.DEFINIÇÃO

O fluxo de caixa é um diagrama que ilustra a movimentação entre entradas e saídas de valores durante um período. Por meio dele, podemos visualizar a situação econômica de um negócio ou de uma aplicação financeira (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

Graficamente, os valores positivos são representados por vetores acima da linha do período e os valores negativos são indicados por vetores abaixo da mesma linha. O fluxo de caixa é classificado em uniforme (imagem 1), se apresentar valores futuros constantes, ou não uniforme (imagem 2), se os valores futuros forem diferentes.

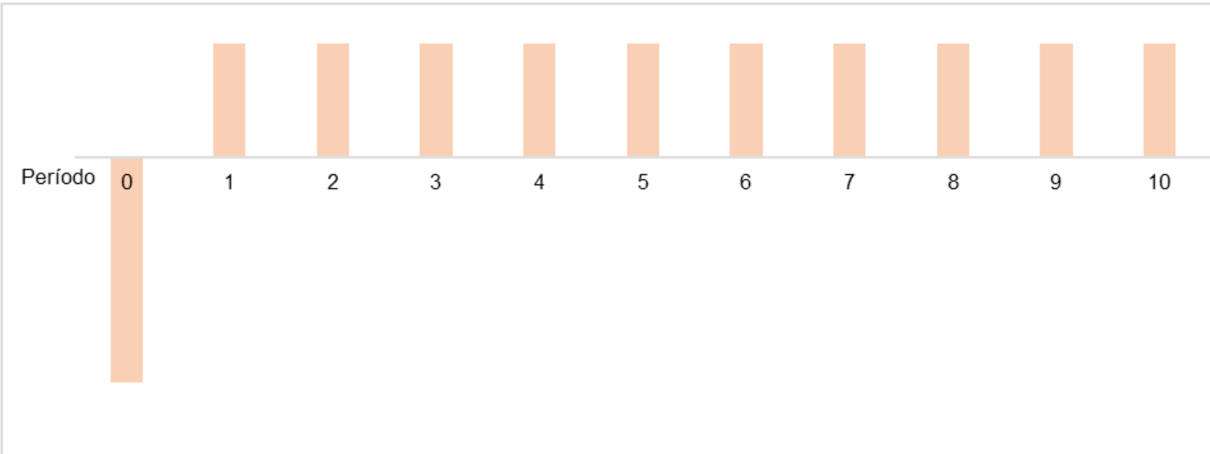


Imagem 1: Fluxo de caixa uniforme

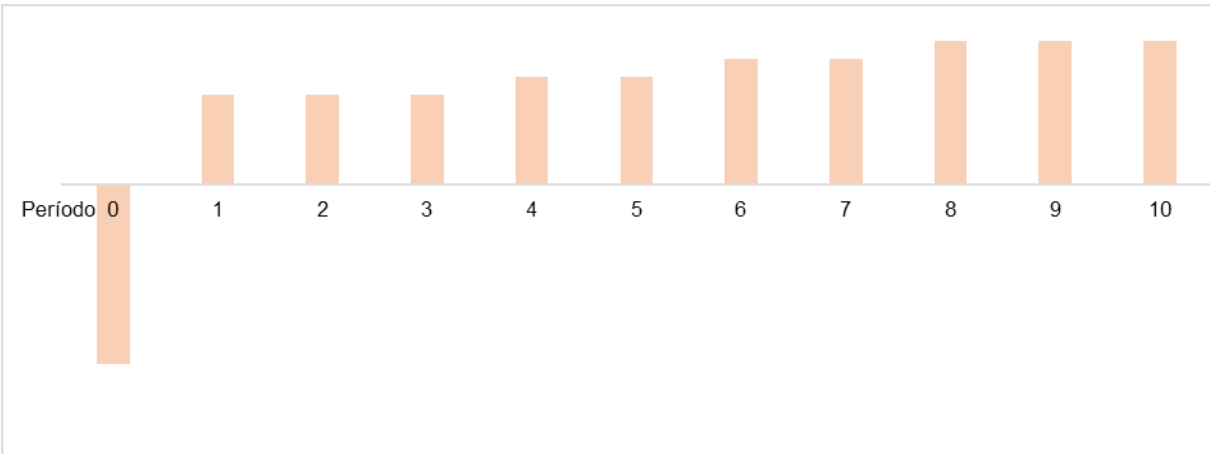


Imagem 2: Fluxo de caixa não uniforme

Para construir o fluxo de caixa, é necessário saber todas as receitas (entradas) e despesas (saídas). Ambas podem ser do dia, do mês, trimestre, do semestre ou do ano, entre outros.

No fluxo de caixa:
Receitas = entradas
Despesas = saídas

As entradas e as saídas devem ser da mesma unidade de tempo. Por exemplo, se as receitas forem do mês, as despesas levantadas devem ser, também, daquele mês. Os valores que formam o fluxo são resultados da subtração entre as receitas e as despesas do período

- **Exemplo 1:**

Pedro é funcionário público, tem um casal de filhos pequenos e é casado. Todos moram juntos e sua esposa encontra-se desempregada. Ele recebe R$ 2.000,00 ao mês. Pedro registra, mensalmente, todos os gastos da família. Em janeiro de 2019, com todas as despesas de 2018 em mãos, ele decidiu montar o fluxo de caixa do ano anterior.

TABELA 1: Gastos de 2018 da família de Pedro

MÊS	GASTOS (R$)
Janeiro	R$ 2.050,18
Fevereiro	R$ 2.010,00
Março	R$ 1.750,00
Abril	R$ 1.600,00
Maio	R$ 1.600,00
Junho	R$ 1.600,00
Julho	R$ 1.680,00
Agosto	R$ 1.865,00
Setembro	R$ 1.784,00
Outubro	R$ 1.698,56
Novembro	R$ 2.089,20
Dezembro	R$ 1.580,90

No exemplo, o valor da entrada é fixo (R$ 2.000,00) e os valores de saída variam conforme os meses. Na tabela 2, temos a subtração entre as entradas e as saídas.

Os valores que constituem o fluxo de caixa são a subtração entre entradas e as saídas

TABELA 2: Valores que irão ao fluxo de caixa de 2018	
MÊS	ENTRADA (R$) – SAÍDA (R$) = VALOR DO FLUXO (R$)
Janeiro	R$ 2.000,00 - R$ 2.050,18 = - R$ 50,18
Fevereiro	R$ 2.000,00 - R$ 2.010,00 = - R$ 10,00
Março	R$ 2.000,00 - R$ 1.750,00 = R$ 250,00
Abril	R$ 2.000,00 - R$ 1.600,00 = R$ 400,00
Maio	R$ 2.000,00 - R$ 1.600,00 = R$ 400,00
Junho	R$ 2.000,00 - R$ 1.600,00 = R$ 400,00
Julho	R$ 2.000,00 - R$ 1.680,00 = R$ 320,00
Agosto	R$ 2.000,00 - R$ 1.865,00 = R$ 135,00
Setembro	R$ 2.000,00 - R$ 1.784,00 = R$ 216,00
Outubro	R$ 2.000,00 - R$ 1.698,56 = R$ 301,44
Novembro	R$ 2.000,00 - R$ 2.089,20 = - R$ 89,20
Dezembro	R$ 2.000,00 - R$ 1.580,90 = R$ 419,10

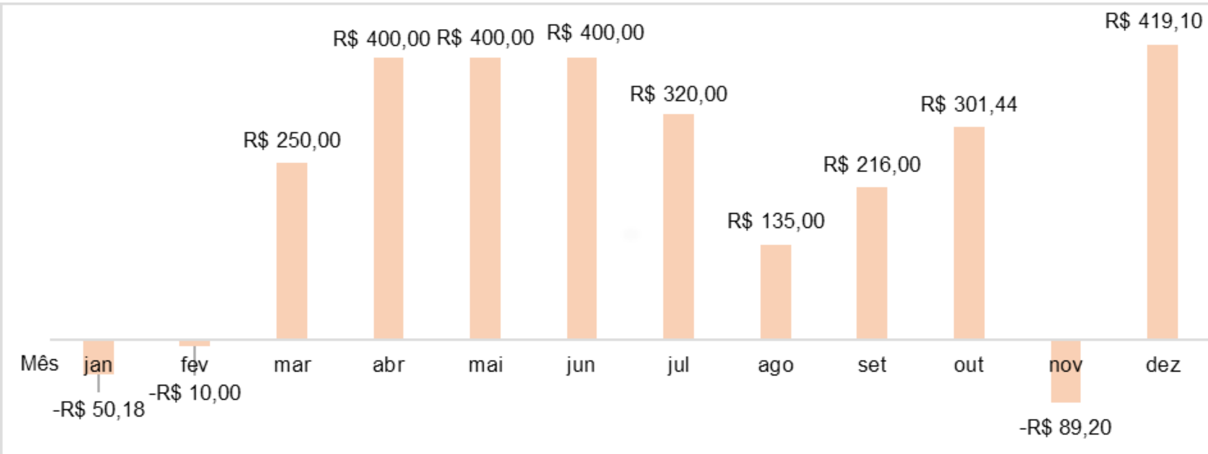


Imagem 3: Fluxo de caixa da família de Pedro em 2018

2. EXERCÍCIOS DE FLUXO DE CAIXA

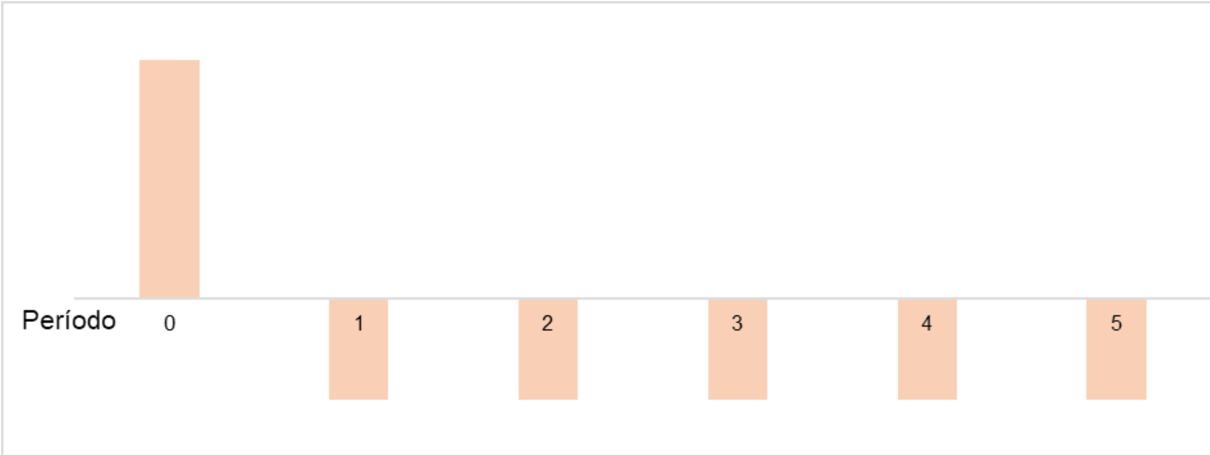
1) Um empresário registou a movimentação econômica de seu estabelecimento por 8 períodos, conforme os valores apresentados na tabela. Monte o fluxo de caixa e analise a situação financeira deste empreendimento.

Período	Entrada (R$)	Saída (R$)
0	R$ 500,00	R$ 1.850,20
1	R$ 800,00	R$ 1.900,00
2	R$ 1.000,00	R$ 1.650,60
3	R$ 1.400,00	R$ 1.580,35
4	R$ 1.400,00	R$ 1.870,00
5	R$ 1.350,00	R$ 2.019,14
6	R$ 1.250,00	R$ 2.019,10
7	R$ 1.250,75	R$ 2.020,03

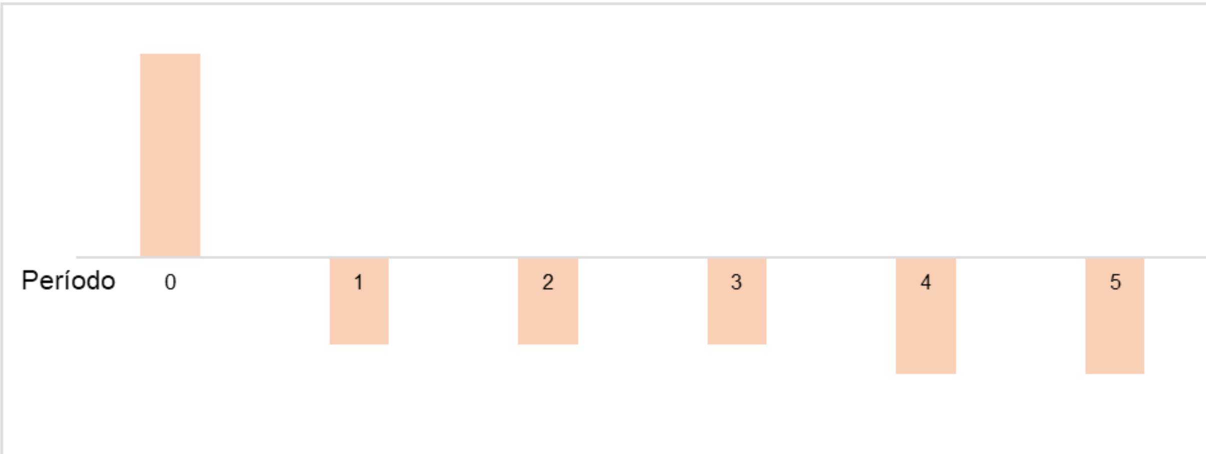
2) (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017- adaptado) Represente o fluxo de caixa de uma série de dez períodos, sendo que os períodos apresentaram resultados positivos no valor de 100 unidades monetárias; já em três deles (terceiro, sétimo e nono períodos) os valores registrados foram de 50 unidades monetárias.

3) Classifique os fluxos de caixa entre uniforme e não uniforme.

a.



b.



2

Juros

1. INTRODUÇÃO

Todas as ações do dia a dia são recompensadas. A remuneração do trabalho é o salário; a remuneração do imóvel é o aluguel; a remuneração do dinheiro são os juros. A depender da negociação, os juros são os valores para dispor ou receber o capital (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

Os valores dos juros podem ser expressos em unidades monetárias ou em taxas.

A taxa de juros é expressa na forma percentual ou unitária.

Valores dos juros = X u. m.

Taxa de juros = i% (percentual) = 0,0i (unitária). Para passar do percentual para forma unitária basta dividir a taxa por 100.

- **Exemplo:**

Domingo, 21 de janeiro. Um amigo de Pedro foi até sua casa pedir R$ 100,00 emprestados, mas disse que lhe poderia pagar apenas em junho. Após verificar se tinha disponibilidade, Pedro propôs que o valor a ser pago fosse R$ 110,00, e não mais R$ 100,00. Ambos concordaram e fecharam o acordo.

Observamos que Pedro só aceitou emprestar o dinheiro ao amigo com uma remuneração do capital. A quantia remunerada é obtida pela subtração entre os valores recebido e emprestado.

$$\text{Juros} = 110{,}00 - 100{,}00$$

$$\text{Juros} = 10{,}00$$

A recompensa do empréstimo foi de R$ 10,00 (expresso em valores). Pode-se interpretar esse valor como: atrativo para Pedro emprestar e atrativo para o seu amigo tomar emprestado.

1.2. Exercício

1) Avalie as afirmações apesentadas, marcando "V" para verdadeiro e "F" para falso, justificando as alternativas falsas.

a. ( ) Uma pessoa ao tomar o empréstimo está pagando juros para dispor do capital.
b. ( ) Uma agência de financiamento paga juros aos seus clientes para emprestar o capital.
c. ( ) Uma taxa de juros igual a 0,70% está escrita de maneira unitária.
d. ( ) A taxa de juros igual a 0,10% é igual a 0,001.

2. JUROS SIMPLES

Os juros simples são o rendimento, sempre, em cima do valor inicial (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

O valor dos juros, nesse regime, é dado pela seguinte equação:

$$J = i \times VP \times n \quad (1)$$

Onde:

J: representa os valores dos juros;
I: a taxa de juros;
VP: o valor presente, e
N: o número (quantidade) de períodos.

> A **taxa de juros (i)** e os **períodos (n)** devem estar na mesma unidade. Isso quer dizer que se a taxa de juros estiver ao mês (a. m.), o(s) período(s) deve(m) estar em mês(es). Já se a taxa estiver ao ano (a. a.), o(s) período(s) deve(m) ser anual(ais), e assim sucessivamente.
>
> A expressão **valor presente** é sinônima de **capital inicial** e de **principal**. Nesta apostila usaremos mais o termo valor presente (VP).

Se a negociação entre os **agentes** ocorrer no âmbito dos juros simples, quem tomar o serviço pagará o principal mais os juros.

Agentes: pessoas físicas, empresas ou governo.

O valor pago é denominado como **valor futuro** (ou montante) e é expresso pela seguinte equação:

$$VF = VP + J \quad (2)$$

Como vimos, o valor dos juros (J) é dado por $J = i\,P\,n$. Substituindo a fórmula na expressão 2, temos:

$$VF = VP + (i \times VP \times n) \quad (3)$$

Realizando algumas manipulações algébricas, o valor futuro é dado por:

$$VF = VP \times (1 + i \times n) \quad (4)$$

Onde:
VF: valor futuro;
VP: valor presente;
i: taxa de juros, e
n: número de períodos.

Por meio da fórmula do valor futuro (equação 3 ou 4), podemos encontrar o valor presente, a taxa de juros e o número de períodos, isolando esses termos.

$$VP = \frac{VF}{1 + (i \times n)} \quad (5)$$

$$i = \frac{VF - VP}{VP \times n} \quad (6)$$

$$n = \frac{VF - VP}{VP \times i} \quad (7)$$

2.1. Aplicando equações

Pedro tomará emprestado R$ 1.000,00 com seu sogro. O valor será pago em três meses, com uma taxa de juros de 5% ao mês (a. m.).

1) Qual o valor futuro em cada mês?

Descrevendo as informações do enunciado, temos: VP = R$ 1.000,00, i (a. m.) = 5% = 0,05. No primeiro mês o n =1. No segundo mês n = 2. No terceiro mês n = 3.

O VF nos juros simples é dado por:

$$VF = VP \times (1 + i \times n)$$

Sempre nesta expressão resolvemos primeiro a multiplicação da taxa de juros com o número de períodos; depois somamos esse produto com o 1, e o resultado dessa soma multiplicamos pelo valor presente.

$$VF_1 = 1.000,00 \times (1 + 0,05 \times 1)$$

$$VF_1 = 1.000,00 \times (1 + 0,05)$$

$$VF_1 = 1.000,00 \times (1,05)$$

$$VF_1 = R\$\ 1.050,00$$

$$VF_2 = 1.000,00 \times (1 + 0,05 \times 2)$$

$$VF_2 = 1.000,00 \times (1 + 0,10)$$

$$VF_2 = 1.000,00 \times (1,10)$$

$$VF_2 = R\$\ 1.100,00$$

$$VF_3 = 1.000,00 \times (1 + 0,05 \times 3)$$

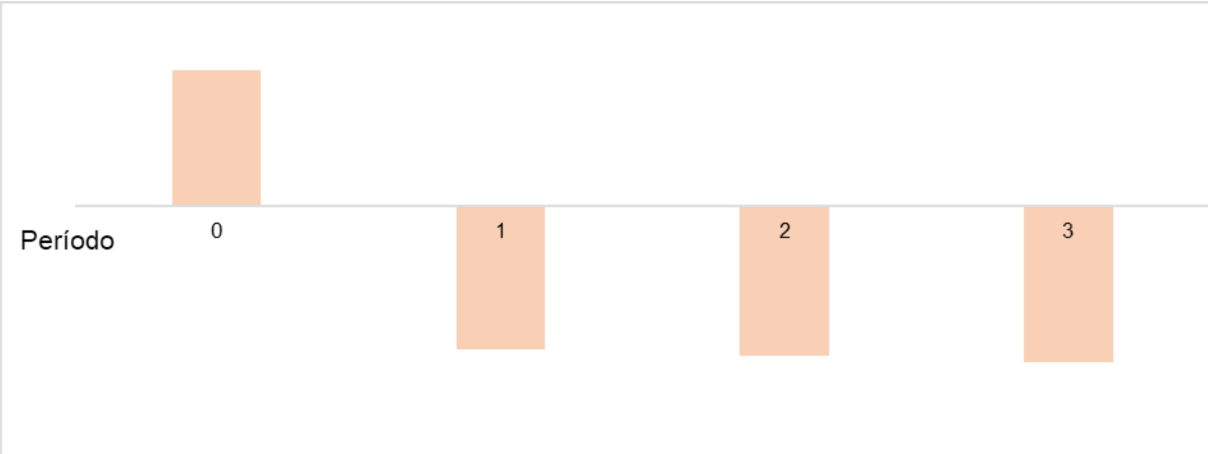
$$VF_3 = 1.000,00 \times (1 + 0,15)$$

$$VF_3 = 1.000,00 \times (1,15)$$

$$VF_3 = R\$\ 1.150,00$$

Os valores futuros serão:
- para o primeiro mês = R$ 1.050,00,
- para o segundo mês = R$ 1.100,00, e
- para o terceiro mês = R$ 1.150,00.

2) Qual é o fluxo de caixa?



3) Qual o valor total de juros a pago por Pedro?

Descrevendo as informações do enunciado, temos: VP = R$ 1.000,00, i (a. m.) = 5% = 0,05, n = 3.

Há duas formas de se calcular o total dos juros pagos: a primeira, utilizando a equação 1 ou subtraindo do último valor futuro o valor presente.

$$J = i \times VP \times n \qquad J = VF_3 - VP$$

$$J = 0{,}05 \times 1000 \times 3 \qquad J = 1.150{,}00 - 1.000{,}00$$

$$J = R\$\ 150{,}00 \qquad J = R\$\ 150{,}00$$

Os juros totais pagos são de R$ 150,00.

4) Supondo que o enunciado fosse modificado e pedisse o valor presente, dizendo que o valor futuro no terceiro mês seria igual a R$ 1.150,00 e a taxa de juros a 5% ao mês.

Descrevendo as informações do enunciado, temos: VF_3 = R$ 1.150,00, i (a. m.) = 5% = 0,05, n = 3.

$$VP = \frac{VF}{1 + (i \times n)}$$

Na equação acima primeiro deve-se resolver a multiplicação da taxa de juros com o número de período, depois somar o produto com o valor 1, e por último dividir o valor futuro com o valor da soma.

$$VP = \frac{1.150,00}{1 + (0,05 \times 3)}$$

$$VP = \frac{1.150,00}{1 + 0,15}$$

$$VP = \frac{1.150,00}{1,15}$$

$$VP = \frac{1.150,00}{1,15}$$

$$VP = \text{R\$ } 1.000,00$$

O valor presente é de R$ 1.000,00

5) Supondo que o enunciado foi novamente alterado e pedisse a taxa de juros dizendo que o valor futuro no segundo mês era igual R$ 1.100,00 e o valor presente igual R$ 1.000,00.

Descrevendo as informações do enunciado, temos: VF_2 = R$ 1.100,00, VP = R$ 1.000,00, n = 2.

$$i = \frac{VF - VP}{VP \times n}$$

Nesta fórmula primeiro subtraímos o valor futuro do valor presente e multiplicamos o valor presente com o número do período para depois resolvermos essa divisão.

$$i = \frac{1.100,00 - 1.000,00}{1.000,00 \times 2}$$

$$i = \frac{100,00}{1.000,00 \times 2}$$

$$i = \frac{100,00}{2.000,00}$$

$$i = 0,05$$

A taxa de juros = 5% ao mês (ou escrita de forma unitária = 0,05).

6) Se o enunciado dissesse que a taxa de juros é igual a 5% ao mês, o valor presente igual R$ 1.000,00. Em qual período teríamos um valor futuro igual a R$ 1.050,00?

Descrevendo as informações do enunciado, temos: VF = R$ 1.050,00, VP = R$ 1.000,00 e i = 5% a. m.

$$n = \frac{VF - VP}{VP \times i}$$

Nesta fórmula primeiro subtraímos o valor futuro do valor presente e multiplicamos o valor presente com a taxa de juros para depois resolvermos essa divisão.

$$n = \frac{1.050,00 - 1.000,00}{1.000,00 \times 0,05}$$

$$n = \frac{50,00}{1.000,00 \times 0,05}$$

$$n = \frac{50,00}{50,00}$$

$$n = 1$$

Será o primeiro período para um VF = R$ 1.050,00, VP = R$ 1.000,00 e i = 0,05.

2.2.1 EXERCÍCIOS JUROS SIMPLES

1) O que é juros simples?

2) Qual é o valor futuro no sexto ano de um investimento de R$ 10.000,00 aplicado à uma taxa de 4,5% a. a.? Considere o regime de juros simples.

3) (ROBERTO, s/d – adaptado). Dado um capital inicial de R$ 100.000,00 aplicado à uma taxa 3% ao trimestre. Qual o valor dos juros após 2 anos? Considere o regime de juros simples.

4) (SAMANEZ, 2010 – adaptado). Quanto tempo que triplica um capital inicial de R$ 100,00 aplicados a uma taxa de juros compostos de 5% a. m.?

5) (SAMANEZ, 2010) Qual é a taxa anual de juros simples obtida por uma aplicação de $1.300 que, após um ano, produz um montante de $1.750?

6) (SAMANEZ, 2010 – adaptado) Um capital de $135.000 transformou-se em $180.000 após 45 dias de aplicação. Calcule a taxa de juros simples ao mês obtida na operação (considere mês = 30 dias).

7) (SAMANEZ, 2010). Uma pessoa aplicou um capital em uma conta remunerada que rende juros simples de 30% a.a. Depois de três anos, resgatou metade dos juros obtidos e reaplicou a outra metade por um ano à taxa de juros simples de 32% a.a., obtendo um rendimento de $20,16 nessa última aplicação. Calcule o valor do capital aplicado inicialmente.

8) (SAMANEZ, 2010 – adaptado) Determine o capital que aplicado a taxa de juros simples de 24% a. a. rende $300,00 em 365 dias.

2.3 JUROS COMPOSTOS

Os juros compostos (ou capitalização) podem ser definidos como o rendimento sobre o valor anterior, isto é, a taxa de juros incide sobre capital anterior. Em outras palavras: a base do rendimento do período n é o valor futuro do período n-1, seu antecessor (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

Em regime de juro composto, o valor futuro (fórmula 8), o valor presente (fórmula 9), a taxa de juros (fórmula 10), o número de períodos (fórmula 11) e os valor dos juros (fórmula 12) são dados, algebricamente, por:

$$\mathbf{VF = VP \times (1 + i)^n} \quad (8)$$

$$\mathbf{VP = \frac{VF}{(1+i)^n}} \quad (9)$$

$$\mathbf{i = \sqrt[n]{\left(\frac{VF}{VP}\right)} - 1} \quad (10)$$

$$\mathbf{n = \frac{\log\left(\frac{VF}{VP}\right)}{\log\,(1+i)}} \quad (11)$$

$$\mathbf{J = VF_n - VP} \quad (12)$$

Onde:
VF: valor futuro;
VP: valor presente;
I: taxa de juros;
N: número de períodos;

$\sqrt[n]{}$ **:** raiz enésima;

Log: função logarítmica**,** e
VF$_n$: último valor futuro.

Para os (as) alunos (as) curiosos (as)! No anexo A está o desenvolvimento da fórmula geral do valor futuro através da equação dos juros simples e também como se chega às equações 9, 10 e 11.

Observações importantes:

A taxa de juros (i) e os períodos (n) devem estar na mesma unidade. Isso quer dizer que se a taxa de juros estiver ao mês (a. m.) o(s) período(s) deve(m) estar em mês(es). Já se a taxa estiver ao ano (a. a.) o(s) período(s) deve(m) ser anual(ais) e assim sucessivamente.

A expressão valor presente é sinônima de capital inicial e de principal. Nesta apostila usaremos mais o termo valor presente (VP).

Nunca divida, multiplique, some ou subtraia a taxa de juros compostos.

Para aprendermos a aplicação das equações da capitalização (juros compostos), utilizaremos o mesmo exemplo e as mesmas perguntas usadas na seção de juros simples.

Para o leitor que não se lembra, o enunciado nos diz...

- Pedro tomará emprestado R$ 1.000,00 com seu sogro. O valor será pago em três meses com uma taxa de juros de 5% ao mês (a. m.)

1) Qual o valor futuro em cada mês?

Descrevendo as informações do enunciado, temos: VP = R$ 1.000,00, i (a. m.) = 5% = 0,05.

No primeiro mês o n = 1. No segundo mês n = 2. No terceiro mês n = 3.

O VF nos juros compostos é dado por:

$$VF = VP \times (1 + i)^n$$

Sempre nesta expressão resolvemos primeiro a soma do 1 com a taxa de juros, depois elevaremos o resultado ao número de períodos e, por último, multiplicaremos pelo valor presente.

$$VF_1 = 1000 \times (1 + 0{,}05)^1$$

$$VF_1 = 1000 \times (1{,}05)^1$$

$$VF_1 = 1000 \times 1{,}05$$

$$VF_1 = R\$\ 1.050{,}00$$

$$VF_2 = 1000 \times (1 + 0{,}05)^2$$

$$VF_2 = 1000 \times (1{,}05)^2$$

$$VF_2 = 1000 \times 1{,}1025$$

$$VF_2 = R\$\ 1.102{,}50$$

$$VF_3 = 1000 \times (1 + 0{,}05)^3$$

$$VF_3 = 1000 \times (1{,}05)^3$$

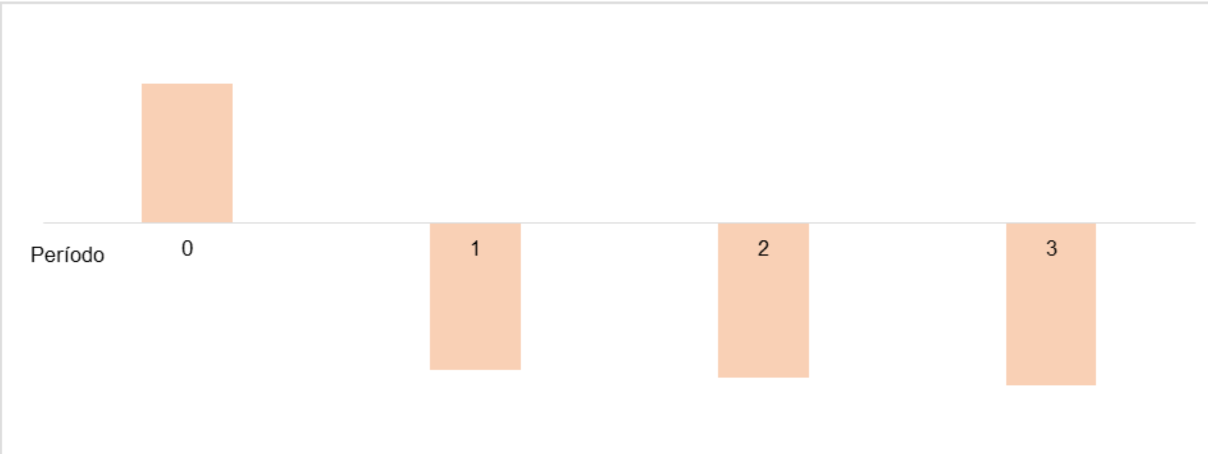
$$VF_3 = 1000 \times (1{,}05)^3$$

$$VF_3 = 1000 \times 1{,}1576$$

$$VF_3 = R\$\ 1.157{,}60$$

Os valores futuros serão: para o primeiro mês = R$ 1.050,00, para o segundo mês = R$ 1.102,50 e para o terceiro mês = R$ 1.157,60.

2) Qual é o fluxo de caixa?



3) Qual o valor total de juros a pago por Pedro?

Descrevendo as informações, temos: VP = R$ 1.000,00 e VF_3 = R$ 1.157,60.

$$J = VF_3 - VP$$

$$J = 1.157{,}60 - 1.000{,}00$$

$$J = R\$\ 157{,}60$$

Os juros totais pagos é R$ 157,60.

4) Supondo que o enunciado foi modificado e pedisse o valor presente dizendo que o valor futuro no terceiro mês seria igual a R$ 1.157,60 e a taxa de juros seria de 5% ao mês.

Descrevendo as informações do enunciado, temos: VF_3 = R$ 1.157,60, i (a. m.) = 5% = 0,05, n = 3.

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Na equação anterior, primeiro deve-se resolver a soma da taxa de juros com o valor 1, depois deve-se elevar o resultado ao número de período, e por último dividir o valor futuro.

$$VP = \frac{1.157{,}60}{(1+0{,}05)^3}$$

$$VP = \frac{1.157{,}60}{(1{,}05)^3}$$

$$VP = \frac{1.157{,}60}{1{,}1576}$$

$$VP = R\$\ 1.000{,}00$$

O valor presente é de R$ 1.000,00

5) Supondo que o enunciado foi novamente alterado e pedisse a taxa de juros dizendo que o valor futuro no segundo mês seria igual R$ 1.102,50 e o valor presente igual a R$ 1.000,00.

Descrevendo as informações do enunciado, temos: VF_2 = R$ 1.102,50, VP = R$ 1.000,00, n = 2.

$$i = \sqrt[n]{\left(\frac{VF}{VP}\right)} - 1$$

Nesta fórmula, primeiro, dividimos o valor futuro pelo valor presente, depois tiramos a raiz do quociente (o valor da raiz será igual ao número de período), por último e subtraímos por 1.

$$i = \sqrt[2]{\left(\frac{1.102{,}50}{1.000{,}00}\right)} - 1$$

$$i = \sqrt[2]{1.1025} - 1$$

$$i = 1{,}05 - 1$$

$$i = 1{,}05 - 1$$

$$i = 0{,}05$$

A taxa de juros = 5% ao mês (ou escrita de forma unitária = 0,05).

6) Se o enunciado dissesse que a taxa de juros é igual a 5% ao mês, o valor presente igual R$ 1.000,00. Em qual período teríamos um valor futuro igual a R$ 1.050,00?

Descrevendo as informações do enunciado, temos: VF = R$ 1.050,00, VP = R$ 1.000,00 e i = 5% a. m.

$$n = \frac{\log\left(\frac{VF}{VP}\right)}{\log\ (1 + i)}$$

Nesta fórmula primeiro dividimos o valor futuro pelo valor presente, depois somamos a taxa de juros com o número 1. Após deve-se tirar o logaritmo do quociente e dá soma. Por último resolve a divisão.

$$n = \frac{\log\left(\frac{1.050,00}{1.000,00}\right)}{\log\ (1 + 0,05)}$$

$$n = \frac{\log\ 1,05}{\log\ (1 + 0,05)}$$

$$n = \frac{\log\ 1,05}{\log\ 1,05)}$$

O logaritmo natural de 1,05 = 0,0488

$$n = \frac{0,0488}{0,0488}$$

$$n = 1$$

Será o primeiro período para um VF = R$ 1.050,00, VP = R$ 1.000,00 e i = 0,05.

2.3.1 EXERCÍCIOS JUROS COMPOSTOS

Na seção 3 (próxima) compararemos os juros simples como os compostos. Portanto, propomos nesse setor que os alunos realizem os mesmos exercícios realizados na seção 2.2.1, porém levando em consideração os juros compostos.

1) O que é juros compostos ou sistema de capitalização?

2) Qual é o valor futuro no sexto ano de um investimento de R$ 10.000,00 aplicado à uma taxa de juros compostos igual a 4,5% a. a.?

3) (ROBERTO, s/d – adaptado) Dado um capital inicial de R$ 100.000,00 aplicado à uma taxa 3% ao trimestre. Qual o valor dos juros após 2 anos? Considere o sistema de capitalização.

4) (SAMANEZ, 2010 – adaptado) Quanto tempo que triplica um capital inicial de R$ 100,00 aplicados a uma taxa de juros compostos de 5% a. m.? Considere log 3 = 1,09861 e log 1,05 = 0,0488.

5) (SAMANEZ, 2010 - adaptado) Qual é a taxa anual de juros compostos obtida por uma aplicação de $1.300 que, após um ano, produz um montante de $1.750?

Considere $\sqrt[1]{1,3461} = 1,3461$.

6) (SAMANEZ, 2010 – adaptado). Um capital de $135.000 transformou-se em $180.000 após 45 dias de aplicação. Calcule a taxa de juros compostos ao mês obtida na operação (considere mês = 30 dias e $\sqrt[1,5]{1,33}$ = 1,2094).

7) (SAMANEZ, 2010 - adaptado). Uma pessoa aplicou um capital em uma conta remunerada que rende juros compostos de 30% a.a. Depois de três anos, resgatou metade dos juros obtidos e reaplicou a outra metade por um ano à taxa de juros compostos de 32% a.a., obtendo um rendimento de $20,16 nessa última aplicação. Calcule o valor do capital aplicado inicialmente.

8) (SAMANEZ, 2010 – adaptado) Determine o capital que aplicado a taxa de juros compostos de 24% a. a. rende $300,00 em 365 dias.

2.4 Comparação entre juros simples e juros compostos

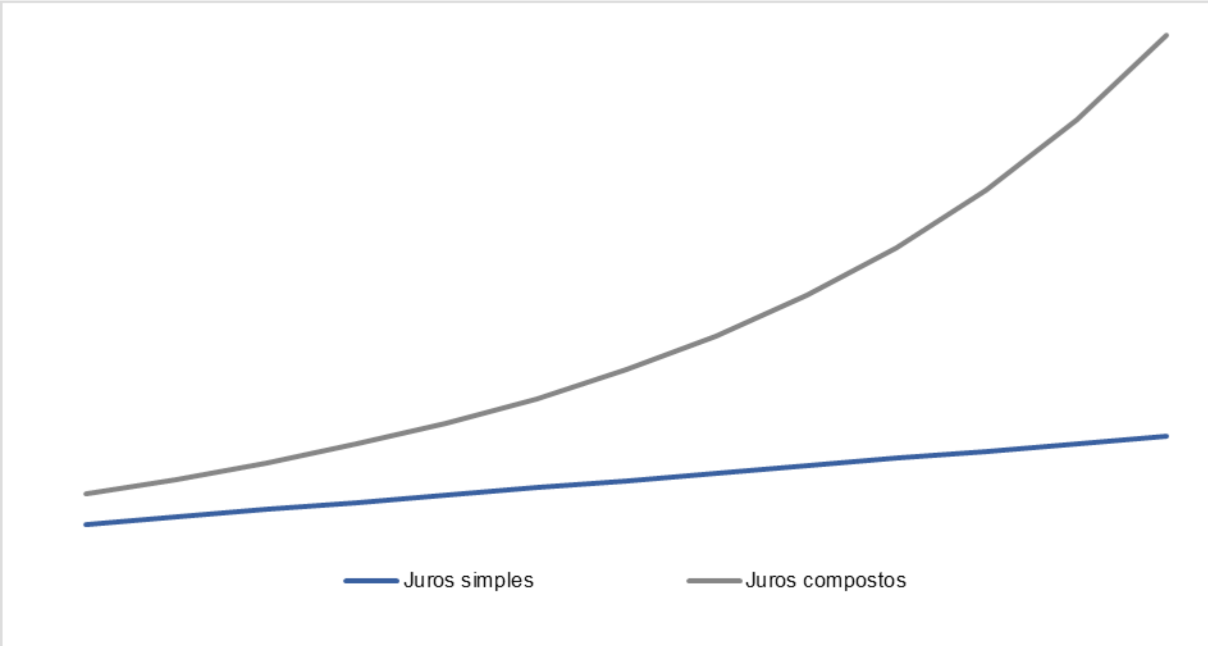
Para comparar o regime de juros simples com a capitalização, tomamos a tabela 3. Nela é possível verificar os valores futuros obtidos no exemplo das seções 2.1 e 2.2.

TABELA 3: Comparativo: juros simples *versus* juros compostos

REGIME	JUROS SIMPLES	JUROS COMPOSTOS
Valor presente	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
Taxa de juros (a. m.)	5%	5%
Valor futuro (primeiro mês)	R$ 1.050,00	R$ 1.050,00
Valor futuro (segundo mês)	R$ 1.100,00	R$ 1.102,50
Valor futuro (terceiro mês)	R$ 1.150,00	R$ 1.157,60
Rendimento	R$ 150,00	R$ 157,60

Observamos, na tabela 3, que o valor futuro no primeiro período é o mesmo tanto nos juros simples como nos compostos, isso sempre acontecerá. No entanto, a partir do segundo período o valor futuro será maior na capitalização, assim como o rendimento. O fato se deve porque nos juros compostos a incidência da taxa ocorre sobre o período anterior. Visualizamos no gráfico 1 a comparação entre juros simples e compostos (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

GRÁFICO 1: Juros simples versus Juros Compostos



2.4.1 Exercícios

1) Complete o quadro comparativo:

REGIME	JUROS SIMPLES	JUROS COMPOSTOS
Valor presente:	R$ 10.000,00	R$ 10.000,00
taxa de juros (a. m.):	0,50%	0,50%
Valor futuro (primeiro mês):		
Valor futuro (segundo mês):		
Valor futuro (terceiro mês):		
Valor futuro (quarto mês):		
Valor futuro (quinto mês):		

Valor futuro (sexto mês):		
Valor futuro (sétimo mês):		
Valor futuro (oitavo mês):		
Valor futuro (nono mês):		
Valor futuro (décimo mês):		
Valor futuro (décimo primeiro mês):		
Valor futuro (décimo segundo mês):		
Rendimento:		

2) Marque V para as afirmações verdadeiras e F para as afirmações falsas. Justifique as alternativas falsas.

a. ( ) Na capitalização o valor futuro é menor, dado os mesmos capital, período e taxa de juros do que um regime de juros simples.

b. ( ) Para os mesmos valor presente, período e taxa de juros, o valor dos juros na capitalização é maior.

c. ( ) O capital se quadruplica mais rápido com taxa composta de juros do que com a taxa simples de juros, dado um mesmo valor presente.

d. ( ) O valor futuro no primeiro período é igual tanto para juros simples como para juros compostos, considerando a mesma taxa e mesmo valor presente.

3

Taxas de juros

As taxas de juros podem ser categorizadas em dois modos: nominal ou efetiva. É chamada de taxa de juros nominal quando o período da taxa não é igual ao período da capitalização. Quando o período da taxa e do rendimento se coincidem é denominado taxa efetiva (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

1. CONVERSÃO DE TAXA NOMINAL PARA TAXA EFETIVA

A taxa nominal não é igual à taxa efetiva em juros compostos, mas há uma relação entre elas. Podemos calcular a conversão de uma taxa nominal para uma taxa efetiva por meio da fórmula 13 (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

$$\mathbf{i} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}} - \mathbf{1} \quad \textbf{(13)}$$

Onde:
I: taxa efetiva;
R: taxa nominal;
N: número períodos da capitalização.

Para os leitores curiosos! No anexo B encontra-se o desenvolvimento da fórmula 13.

Para aplicar a equação 13, tomamos o seguinte exemplo:

Supondo que Pedro foi até uma agência de empréstimo. O portfólio da empresa contém um empréstimo de R$ 200.000,00 a serem pagos em 120 meses com uma taxa 5% ao mês. Na negociação, a atendente multiplica a taxa mensal por 12 e diz para o cliente que a taxa de juros é 60% a. a.

A atendente ofereceu o empréstimo no prazo mensal e uma taxa ao ano.
Será que essa taxa 60% a. a. é a verdadeira para o empréstimo?

Convertendo, a taxa nominal 60% a. a. para a taxa efetiva anual.

$$i = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n} - 1$$

Nessa equação deve-se resolver primeiro o quociente entre a taxa de juros nominal e o período, depois somar a divisão por 1, após a soma, elevar ao número de períodos e, por último, subtrair por 1.

Como queremos determinar a taxa de juros efetiva ao ano, com uma taxa de juros nominal igual a 60% a. a. e o período igual a 12 meses (= 1 ano), temos:

$$i = \left(1 + \frac{0,60}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = (1 + 0,05)^{12} - 1$$

$$i = (1,05)^{12} - 1$$

$$i = 1,7959 - 1$$

$$i = 0,7959$$

$$i = 79,59\% \text{ a. a.}$$

Na venda a atendente multiplicou 5% a. m. por 12 meses, 60% a. a. não é equivalente a 5% a. m. em sistema de capitalização. A taxa de juros efetiva anual para essa capitalização é igual a 79,59% a. a.

3.2 Conversão entre taxas efetivas

Além da conversão de taxa nominal para taxa efetiva, é comum encontrarmos em situações cotidianas, onde temos que converter as taxas de juros efetivas. Essa conversão ocorre para determinar taxas equivalentes quando os períodos são diferentes (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

Para converter a taxa efetiva de um período menor para um período maior utilizamos a equação 14:

$$\mathbf{i_{maior} = (1 + i_{menor})^{n_{menor}} - 1} \quad \textbf{(14)}$$

Onde:

$\mathbf{i}_{maior}$: taxa efetiva do período maior;
$\mathbf{i}_{menor}$: taxa efetiva do período menor;
$\mathbf{n}_{menor}$: número de período da taxa menor.

Para converter a taxa efetiva de um período maior para um menor utilizamos a equação 15:

$$\mathbf{i_{menor} = (i_{maior} + 1)^{\frac{1}{n_{menor}}} - 1} \quad \textbf{(15)}$$

Onde:

$\mathbf{i}_{menor}$: taxa efetiva do período menor;
$\mathbf{i}_{maior}$: taxa efetiva do período maior;
$\mathbf{n}_{menor}$: número de período da taxa menor.

Para os (as) estudantes curiosos (as), no Anexo C encontra-se o desenvolvimento das equações 14,15.

Por exemplo:

Taxa do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (Selic): é a taxa de juros básica da economia brasileira. Administrada pelo Banco Central (Bacen,) ela é usada como controle da inflação, como base para os juros dos empréstimos, financiamentos e outras aplicações financeiras. Durante o período de 1º de agosto a 18 de setembro de 2019, o Bacen estabeleceu como meta para a taxa Selic 6% a. a. para 2019 (Portal: BANCO CENTRAL DO BRASIL).

Supondo que a taxa de juros Selic termine o ano de 2019 igual 6% a. a. , qual seria a taxa Selic ao mês equivalente?

Queremos determinar a taxa mensal, dado uma taxa anual. Portanto, é de um período maior para o período menor (usaremos a equação 15), 1 ano é igual a 12 meses, alimentando a equação com esses argumentos, temos:

$$i_{menor} = (i_{maior} + 1)^{\frac{1}{n_{menor}}} - 1$$

Nessa equação deve-se resolver primeiro a soma da taxa de juros maior com o valor 1, depois elevar o resultado ao quociente de 1 e o número de períodos da taxa menor e, por último, subtrair por 1.

$$i_{menor} = (0{,}06 + 1)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i_{menor} = (1{,}06)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i_{menor} = (1{,}06)^{0{,}083333} - 1$$

$$i_{menor} = 1{,}0049 - 1$$

$$i_{menor} = 0{,}49\%\ \text{a.m.}$$

Portanto, a equivalência mensal de 6% ao ano é 0,49% ao mês.

Se alterássemos o enunciado e disséssemos que a taxa Selic mensal é igual 0,49% a. m., poderíamos determinar a taxa Selic anual por meio da equação 14.

$$i_{maior} = (1 + i_{menor})^{n_{menor}} - 1$$

Nessa equação deve-se resolver primeiro a soma da taxa de juros menor com o valor 1, depois elevar o resultado ao número de períodos da taxa menor e, por último, subtrair por 1.

Como temos a $Selic_{mensal}$ = 0,49% a. m., n = 12, logo:

$$i_{maior} = (1 + 0{,}0049)^{12} - 1$$

$$i_{maior} = (1{,}0049)^{12} - 1$$

$$i_{maior} = (1{,}0049)^{12} - 1$$

$$i_{maior} = 1{,}060 - 1$$

$$i_{maior} = 0{,}060$$

$$i_{maior} = 6{,}0\%$$

Logo, a taxa Selic anual, equivalente a uma Selic mensal de 0,49%, é 6%.

3.3 Exercícios: Taxa de juros

1) Classifique as taxas em nominal e efetiva:

a. Capitalização de 12 meses com taxa igual a 3% ao trimestre.
b. Capitalização de 6 meses com taxa igual a 9% ao semestre.
c. Capitalização de 2 meses com taxa igual a 2% ao bimestre.
d. Capitalização de 1 ano com taxa igual a 4,5% ao quadriênio.
e. Capitalização de 3 semestre com taxa igual 9,5 ao semestre.

2) (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017) Qual a taxa efetiva anual de 30% a. a. com capitalização trimestral?

3) (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017) Qual é a taxa efetiva anual, de 24% ao semestre capitalizada mensalmente?

4) (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017) Qual taxa efetiva mensal equivalente a 12% ao semestre?

5) (SAMANEZ, 2010) Qual a taxa efetiva anual equivalente a uma taxa quinzenal efetiva de 2%. Considere que o ano comercial tem 24 quinzenas.

6) (SAMANEZ, 2010) Qual a taxa efetiva trimestral equivalente à taxa efetiva de 40% em dois anos?

7) Qual é a taxa anual equivalente de uma taxa de juros efetiva trimestral igual a 3,28%?

8) Um grande banco nacional diz que a conta poupança rende 0,5% ao mês. Determine a taxa efetiva semestral equivalente ao rendimento da poupança?

9) Dadas as mesmas condições da questão 8, determine a taxa efetiva equivalente ao dia desse rendimento. Considere 1 mês = 30 dias, $1{,}5^{\frac{1}{30}} = 1{,}0136$, $1{,}05^{\frac{1}{30}} = 1{,}0016$ e $1{,}005^{\frac{1}{30}} = 1{,}0002$

3.4 Taxa de juros - Considerações para juros simples

Alguns estudantes podem estar curiosos ao notar que, no tópico sobre as taxas de juros (seção 3, 3.1, 3.2), não abordamos o regime de juros simples. A justificativa por não falarmos disso é: nos juros simples as taxas de são proporcionais (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

Falar que a taxa de juros é igual a 14,40% ao ano é a mesma coisa que dizer que é uma taxa igual 1,2% ao mês ou 7,2% ao semestre.

Para esclarecermos melhor, iremos determinar o valor futuro de um valor presente igual 1.000,00 unidades monetárias (u. m.), aplicados em regime de juros simples, durante 1 ano com uma taxa de 14,40% a. a.:

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VP} \times (1 + \mathrm{i} \times \mathrm{n})$$

$$VF = 1.000,00 \times (1 + 0,1440 \times 1)$$

$$VF = 1.000,00 \times (1 + 0,1440)$$

$$VF = 1.000,00 \times (1,1440)$$

$$VF = 1.440,00 \text{ u.m.}$$

Determinando o valor futuro para um valor presente igual 1.000,00 unidades monetárias (u. m.), aplicados em regime de juros simples, durante um ano com uma taxa de 1,2% a. m.:

$$VF = VP \times (1 + i \times n)$$

$$VF = 1.000,00 \times (1 + 0,012 \times 12)$$

$$VF = 1.000,00 \times (1 + 0,1440)$$

$$VF = 1.000,00 \times (1,1440)$$

$$VF = 1.440,00 \text{ u.m.}$$

Determinando o valor futuro, para um valor presente igual 1.000,00 unidades monetárias (u. m.), aplicados em regime de juros simples, durante um ano com uma taxa de 7,2% a. s.:

$$VF = VP \times (1 + i \times n)$$

$$VF = 1.000,00 \times (1 + 0,072 \times 2)$$

$$VF = 1.000,00 \times (1 + 0,1440)$$

$$VF = 1.000,00 \times (1,1440)$$

$$VF = 1.440,00 \text{ u.m.}$$

O(A) aluno(a) pode observar que, na aplicação de juros simples, o mesmo valor presente durante o mesmo período as taxas (mensal, semestral e anual) resultou no mesmo valor futuro. A justificativa, para isso, é a definição de juros simples, na qual o rendimento ocorre – sempre – em cima do valor presente inicial.

4

Desconto comercial

Desconto é a denominação de um valor pago por antecipar o recebimento de um título antes da data do vencimento. Essa é uma operação comum no mercado financeiro. Dois exemplos de descontos são: adiantamento de um cheque e de uma nota promissória. O valor liberado (valor líquido) pelo banco é menor que o valor original (valor nominal); a diferença entre o valor líquido e o valor nominal é o valor do desconto. Um dos tipos de descontos é o comercial simples (ou desconto por fora, ou desconto bancário). O seu valor é dado pela equação 16 (SAMANEZ, 2010).

$$\mathbf{D = N \times i_d \times n} \quad (16)$$

Onde:
D: valor descontado;
N: valor original do título;
$\mathbf{i_{d:}}$ taxa de juros pratica pelo banco;
n: número de períodos que falta para o vencimento.

Já o **valor recebido** é expresso por:

$$\mathbf{V = N - D}$$

Substituindo, D por $N \times i_d \times n$, temos:

$$V = N - N \times i_d \times n$$

Realizando algumas manipulações algébricas, temos:

$$\mathbf{V = N \times (1 - i_d \times n)} \quad (17)$$

Onde:
V: valor recebido;
N: valor original do título;
$i_{d:}$ taxa de juros pratica pelo banco;
n: número de períodos que falta para o vencimento.

Para aplicar as equações 16 e 17, tomamos o seguinte exemplo:

Pedro tem um título de R$ 4.000,00 para receber daqui a 3 meses. Necessitando do dinheiro hoje, ele foi ao banco. A atendente disse que a taxa de desconto praticada pela instituição é de 8% a. m. Supondo que Pedro retirou o título, qual é o valor do desconto sofrido, e o quanto que ele efetivamente recebeu?

O **valor do desconto** é dado por:

$$D = N \times i_d \times n$$

Para resolver essa equação, basta multiplicar os termos. Porém, vale destacar que a taxa de desconto e o número de período devem estar na mesma unidade.

Dadas as informações do enunciado: N = R$ 4.000,00, n = 3 meses e i_d= 8% a. m., temos que o valor descontado:

$$D = 4.000,00 \times 0,08 \times 3$$

$$D = R\$ \ 960,00$$

O valor descontado foi de 960 reais.

Podemos calcular o valor recebido efetivamente por:

$$V = N \times (1 - i_d \times n)$$

Nessa equação, deve-se primeiro multiplicar a taxa de desconto pelo número do período, depois subtrair de 1 o valor do produto encontrado e, por último, multiplicar pelo valor nominal.

N = R$ 4.000,00, i_d = 8% a. m., n = 3 meses

$$V = 4.000,00 \times (1 - 0,08 \times 3)$$

$$V = 4.000,00 \times (1 - 0,24)$$

$$V = 4.000,00 \times 0,76$$

$$V = 4.000,00 \times 0,76$$

$$V = R\$\ 3.040,00$$

Como já tínhamos o valor do desconto, outra maneira de encontrar o valor resgatado era subtrair do valor nominal o valor do desconto:

$$V = 4.000,00 - 960,00$$

$$V = R\$\ 3.040,00$$

Portanto, o valor resgatado por Pedro é de R$ 3.040,00.

4.1 Exercícios: desconto comercial

1) Uma lanchonete tem uma nota promissória para receber daqui a 1 ano no valor de R$ 800.000,00. O dono pretende expandir o estabelecimento e, por isso, foi ao banco que cobra para antecipar o valor uma taxa de 3,8% ao bimestre. Se ambos fechassem o acordo qual seria o valor recebido pelo empresário?

2) Um senhor tem títulos que totalizam R$ 8.000,00, com vencimento para dois anos. Uma agência propôs a ele o resgate do valor com uma taxa semestral de 12%. Qual é o valor descontado pelo estabelecimento?

3) Uma empresa ao adiantar suas notas provisórias que venceria em 2 meses, recebeu R$ 9.500,00, a taxa bancária de desconto foi de 2% ao mês. Determine o valor nominal das notas provisórias.

5

Séries uniformes: Pagamentos

Em diversas situações cotidianas nos deparamos com operações de séries uniformes. Nas compras de eletrodomésticos, celulares, computadores e televisores, entre outros, geralmente optamos pelo pagamento parcelado e em alguns casos damos uma entrada.

O valor pago durante determinado tempo caracteriza uma série uniforme. As séries uniformes são divididas em postecipadas – quando não há entrada – e antecipadas – quando há entrada (SAMANEZ, 2010).

O pagamento das séries postecipadas é dado por:

$$\mathbf{PGTO} = \frac{\mathbf{VP}}{\left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right)} \quad (18)$$

Onde:
PGTO: pagamento da série postecipada;
VP: valor presente (valor financiado);
i: taxa de juros;
n: número de períodos.
Nas séries antecipadas (com entrada) o pagamento é dado por:

$$\mathbf{PGTO} = \frac{\mathbf{VP} - \mathbf{E}}{\left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right)} \quad (19)$$

Onde:
PGTO: pagamento da série antecipada;
VP: valor presente (valor financiado);
E: o valor da entrada;
I: taxa de juros;
N: número de períodos.

O desenvolvimento das equações 18 e 19 exige alguns conhecimentos matemáticos mais complexos, como a soma de uma progressão geométrica, logo não iremos nos preocupar como chegar-se a essas fórmulas.

- **Aplicando as equações 18 e 19, temos:**

Pedro pretende comprar um carro usado do seu amigo. O valor do automóvel é de R$ 13.000,00. Por se conhecerem há muito tempo, seu amigo disse que parcelaria o carro em valores iguais, em 24 meses, com uma taxa de juros de 1% ao mês, qual é o valor da parcela paga por Pedro?

$$\mathrm{PGTO} = \frac{\mathrm{VP}}{\left(\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}-1}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} \times \mathrm{i}}\right)}$$

Nessa equação, é necessário primeiro realizar as somas das taxas de juros com o valor 1 e, após, resolver as funções exponenciais. Depois, no quociente do denominador, deve-se subtrair (no numerador) e multiplicar (no denominador). Logo após, deve-se realizar a divisão existente. Por último, deve-se dividir o valor presente pelo resultado encontrado.

No nosso exemplo, temos que o VP = R$ 13.000,00, i = 1% a. m., n = 24 meses.

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000{,}00}{\left(\frac{(1+0{,}01)^{24}-1}{(1+0{,}01)^{24} \times 0{,}01}\right)}$$

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000{,}00}{\left(\frac{(1{,}01)^{24}-1}{(1{,}01)^{24} \times 0{,}01}\right)}$$

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000{,}00}{\left(\frac{1{,}270-1}{1{,}270 \times 0{,}01}\right)}$$

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000{,}00}{\left(\frac{0{,}270}{0{,}0127}\right)}$$

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000{,}00}{21{,}260}$$

$$\mathrm{PGTO} = \mathrm{R\$}\ 611{,}48$$

Nessas condições, Pedro pagaria 24 parcelas iguais de R$ 611,48.

Suponhamos que as condições se mantivessem, mas Pedro desse uma entrada de R$ 2.000,00. Qual seria o valor das parcelas?

Temos: VP = R$ 13.000,00, E = R$ 2.000,00, i = 1% a. m., n = 24 meses.

$$\mathrm{PGTO} = \frac{\mathrm{VP} - \mathrm{E}}{\left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right)}$$

Nessa equação, é necessário, primeiramente, realizar as somas das taxas de juros com o valor 1 e, depois, resolver as funções exponenciais. No quociente do denominador, deve-se subtrair (no numerador) e multiplicar (no denominador), logo após, é necessário realizar a divisão existente. Em seguida, deve-se realizar a subtração entre o valor financiado e a entrada e, por último, realizar o quociente.

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000,00 - 2.000,00}{\left(\frac{(1+0,01)^{24} - 1}{(1+0,01)^{24} \times 0,01}\right)}$$

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000,00 - 2.000,00}{\left(\frac{(1,01)^{24} - 1}{(1,01)^{24} \times 0,01}\right)}$$

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000,00 - 2.000,00}{\left(\frac{1,270 - 1}{1,270 \times 0,01}\right)}$$

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000,00 - 2.000,00}{\left(\frac{0,270}{0,0127}\right)}$$

$$\mathrm{PGTO} = \frac{13.000,00 - 2.000,00}{21,260}$$

$$\mathrm{PGTO} = \frac{11.000,00}{21,260}$$

$$\mathrm{PGTO} = \mathrm{R\$}\ 517,40$$

Caso Pedro desse R$ 2.000,00 de entrada pagaria 24 parcelas iguais de R$ 517,40.

5.1 Exercícios: Séries uniformes - pagamentos

1) Marque V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas.

a. ( ) São chamadas de séries postecipadas quando há entrada.

b. ( ) Os valores pagos ao longo do período em séries uniformes são diferentes.

c. ( ) São chamadas de séries antecipadas quando há entrada e os valores pagos são diferentes.

d. ( ) São chamadas de séries postecipadas quando não há entrada e os valores pagos são diferentes.

e. ( ) Séries postecipadas e antecipadas são uniformes.

2) (SAMANEZ, 2010 - adaptado) Um bem de R$ 4.000,00 será pago em oito prestações mensais iguais que vencem ao fim de cada mês. Considerando que o juro composto cobrado é de 5% a. m. Calcule o valor das prestações.

3) (SAMANEZ, 2010 - adaptado) Considerando as mesmas informações da questão 2, qual seria o valor da prestação se, no ato da compra, fosse pago uma entrada de 20% sobre o valor inicial?

6

Sistemas de amortização

Para construir uma casa própria ou comprar um novo equipamento industrial há necessidade de recursos. Caso uma família ou um empresário não tenham o valor que necessitam para concretizar os seus projetos, eles podem recorrer aos empréstimos bancários (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

As instituições bancárias cobram juros para fornecer empréstimos. As parcelas pagas às agências englobam o valor amortizado da dívida e os juros. Nesta apostila, estudaremos dois dos principais tipos de amortização: o sistema Price e o Sistema de Amortização Constante. O estudo sobre a amortização de dívidas nos permite verificar em qual estado elas estão e o quanto do empréstimo já foi quitado (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017).

Valor principal = amortização + juros

- **Sistema Francês de Amortização (Sistema Price ou Sistema de Prestação Constante**):

Tem prestações constantes; os valores dos juros decrescem com o tempo, enquanto os valores da amortização crescem. É utilizado, principalmente, nas compras de bens de consumo, como no financiamento de um automóvel (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017). Podemos descrever o sistema Price por meio da tabela 4.

TABELA 4: Sistema de Prestação Constante (Sistema Price)

PERÍODO	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR
0	-	-	-	SD_0
1	P_1	$J_1 = i \times SD_0$	$VA_1 = P_1 - j_1$	$SD_1 = SD_0 - VA_1$
2	P_2	$J_2 = i \times SD_1$	$VA_2 = P_2 - j_2$	$SD_2 = SD_1 - VA_2$
3	P_3	$J_3 = i \times SD_2$	$VA_3 = P_3 - j_3$	$SD_3 = SD_2 - VA_3$
...	...	...	...	...
n	P_n	$J_n = i \times SD_{n-1}$	$VA_n = P_n - j_n$	$SD_n = SD_{n-1} - VA_n$

Onde,
N: número de períodos;
P: valor da prestação;
J: valor dos juros;
I: taxa de juros;
VA: valor amortizado**,** e
SD: saldo devedor.

Observações importantes sobre o Sistema Price:

Os valores da prestação são iguais ($P_1 = P_2 = P_3 = ... = P_n$) e fornecidos pela equação das séries postecipadas:

$$P = PGTO = \frac{VP}{\left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right)}$$

$$VP = SD_0$$

Onde:
PGTO ou **P**: valor da prestação;
VP: valor presente (o valor será igual ao saldo devedor no período 0, SD_0);
i: taxa de juros;
n: número de períodos.
Quando a dívida for quitada, a soma dos valores amortizados ($VA_1 + VA_2 + VA_3 + ... + VA_n$) será igual ao saldo devedor na data inicial (SD_0).

- **Sistema de Amortização Constante (SAC):**

Como o próprio nome diz, os valores amortizados são iguais durante o tempo, e são fornecidos pelo quociente entre o saldo devedor inicial (SD_0) e o número de períodos (n). O valor da prestação é dado pela soma do valor amortizado com os juros. Os juros tendem a diminuir com o avanço do tempo e, por isso, o valor das prestações, também, diminui. Esse sistema é utilizado em financiamentos da casa própria (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017). O sistema de amortização constante está descrito na tabela 5.

TABELA 5: Sistema de Amortização Constante (tabela SAC)

PERÍODO	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR
0	-	-	-	SD_0
1	$P_1 = J_1 + VA_1$	$J_1 = i \times SD_0$	$VA_1 = \frac{SD_0}{n}$	$SD_1 = SD_0 - VA_1$
2	$P_2 = J_2 + VA_2$	$J_2 = i \times SD_1$	$VA_2 = \frac{SD_0}{n}$	$SD_2 = SD_1 - VA_2$
3	$P_3 = J_3 + VA_3$	$J_3 = i \times SD_2$	$VA_3 = \frac{SD_0}{n}$	$SD_3 = SD_2 - VA_3$
...	...	...	...	...
n	$P_n = J_n + VA_n$	$J_n = i \times SD_{n-1}$	$VA_n = \frac{SD_0}{n}$	$SD_n = SD_{n-1} - VA_n$

Onde:
n: número de períodos;
P: valor da prestação;
J: valor dos juros;
I: taxa de juros;
VA: valor amortizado, e
SD: saldo devedor.

Observações importantes sobre o Sistema de Amortização constante:

Os valores amortizados são iguais ($VA_1 = VA_2 = VA_3 = ... = VA_n$).

Quando a dívida for quitada, a soma dos valores amortizados ($VA_1 + VA_2 + VA_3 + ... + VA_n$) será igual ao saldo devedor na data inicial (SD_0).

- **EXEMPLO**:

Para aplicar os Sistemas de Amortização Constante e Price, tomamos o seguinte exemplo:

Pedro financiou R$ 1.000,00 em uma agência a serem pagos em 4 meses, com uma taxa de juros de 3% a. m. Construa as tabelas Price e SAC (CASAROTRO FILHO; KOPITTKE, 2017 - adaptado).

A tabela Price desta situação é:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	SD_0
1	P_1	$J_1 = i \times SD_0$	$VA_1 = P_1 - j_1$	$SD_1 = SD_0 - VA_1$
2	P_2	$J_2 = i \times SD_1$	$VA_2 = P_2 - j_2$	$SD_2 = SD_1 - VA_2$
3	P_3	$J_3 = i \times SD_2$	$VA_3 = P_3 - j_3$	$SD_3 = SD_2 - VA_3$
4	P_4	$J_4 = i \times SD_3$	$VA_4 = P_4 - j_4$	$SD_4 = SD_3 - VA_4$

Para definir os valores dessa tabela Price, deve-se primeiro determinar o valor da prestação paga:

$$P = PGTO = \frac{VP}{\left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right)}$$

Pelo enunciado, temos as seguintes informações: SD_0 = R$ 1.000,00, i = 3% a. m. e n = 4 meses, logo o valor da parcela será:

$$P = \frac{1.000,00}{\left(\frac{(1+0,03)^4 - 1}{(1+0,03)^4 \times 0,03}\right)}$$

$$P = \frac{1.000,00}{\left(\frac{(1,03)^4 - 1}{(1,03)^4 \times 0,03}\right)}$$

$$P = \frac{1.000,00}{\left(\frac{1,1255 - 1}{1,1255 \times 0,03}\right)}$$

$$P = \frac{1.000,00}{\left(\frac{0,1255}{0,0338}\right)}$$

$$P = \frac{1.000,00}{3,7130}$$

$$P = R\$\ 269,00$$

Substituindo o valor da parcela na tabela Price, temos:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 1.000,00
1	R$ 269,00	$J_1 = i \times SD_0$	$VA_1 = P_1 - j_1$	$SD_1 = SD_0 - VA_1$
2	R$ 269,00	$J_2 = i \times SD_1$	$VA_2 = P_2 - j_2$	$SD_2 = SD_1 - VA_2$
3	R$ 269,00	$J_3 = i \times SD_2$	$VA_3 = P_3 - j_3$	$SD_3 = SD_2 - VA_3$
4	R$ 269,00	$J_4 = i \times SD_3$	$VA_4 = P_4 - j_4$	$SD_4 = SD_3 - VA_4$

Logo após, deve-se calcular para cada período o juro, o valor amortizado e o saldo devedor, necessariamente, nesta ordem.

Para o mês 1, temos:

$$J_1 = i \times SD_0 \ => \ J_1 = 0,03 \times 1.000,00 = R\$\ 30,00$$

$$VA_1 = P_1 - j_1 => VA_1 = 269,00 - 30,00 = R\$\ 239,00$$

$$SD_1 = SD_0 - VA_1 => SD_1 = 1.000,00 - 239,00 = R\$\ 761,00$$

Substituindo os valores do período 1 na tabela Price, temos:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 1.000,00
1	R$ 269,00	R$ 30,00	R$ 239,00	R$ 761,00
2	R$ 269,00	$J_2 = i \times SD_1$	$VA_2 = P_2 - j_2$	$SD_2 = SD_1 - VA_2$

3	R$ 269,00	$J_3 = i \times SD_2$	$VA_3 = P_3 - j_3$	$SD_3 = SD_2 - VA_3$
4	R$ 269,00	$J_4 = i \times SD_3$	$VA_4 = P_4 - j_4$	$SD_4 = SD_3 - VA_4$

Para o mês 2, temos:

$$J_2 = i \times SD_1 => J_2 = 0{,}03 \times 761{,}00 = R\$ \ 22{,}8$$

$$VA_2 = P_2 - j_2 => VA_2 = 269{,}00 - 22{,}80 = R\$ \ 246{,}2$$

$$SD_2 = SD_1 - VA_2 => SD_2 = 761{,}00 - 246{,}2 = R\$ \ 514{,}8$$

Substituindo os valores do período 2 na tabela Price, temos:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 1.000,00
1	R$ 269,00	R$ 30,00	R$ 239,00	R$ 761,00
2	R$ 269,00	R$ 22,8	R$ 246,2	R$ 514,8
3	R$ 269,00	$J_3 = i \times SD_2$	$VA_3 = P_3 - j_3$	$SD_3 = SD_2 - VA_3$
4	R$ 269,00	$J_4 = i \times SD_3$	$VA_4 = P_4 - j_4$	$SD_4 = SD_3 - VA_4$

Para o mês 3, temos:

$$J_3 = i \times SD_2 => J_3 = 0{,}03 \times 514{,}8 = R\$ \ 15{,}4$$

$$VA_3 = P_3 - j_3 => VA_3 = 269{,}00 - 15{,}4 = R\$ \ 253{,}6$$

$$SD_3 = SD_2 - VA_3 => SD_3 = 514{,}8 - 253{,}6 = R\$ \ 261{,}2$$

Substituindo os valores do período 3 na tabela Price, temos:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 1.000,00
1	R$ 269,00	R$ 30,00	R$ 239,00	R$ 761,00
2	R$ 269,00	R$ 22,8	R$ 246,2	R$ 514,8
3	R$ 269,00	R$ 15,4	R$ 253,6	R$ 261,2
4	R$ 269,00	$J_4 = i \times SD_3$	$VA_4 = P_4 - j_4$	$SD_4 = SD_3 - VA_4$

Para o mês 4, temos:

$$J_4 = i \times SD_3 => J_4 = 0{,}03 \times 261{,}2 = R\$\ 7{,}8$$

$$VA_4 = P_4 - j_4 => VA_4 = 269{,}00 - 7{,}8 = R\$\ 261{,}2$$

$$SD_4 = SD_3 - VA_4 => SD_4 = 261{,}2 - 261{,}2 = R\$\ 0{,}00$$

Logo, a tabela Price completa é:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 1.000,00
1	R$ 269,00	R$ 30,00	R$ 239,00	R$ 761,00
2	R$ 269,00	R$ 22,8	R$ 246,2	R$ 514,8
3	R$ 269,00	R$ 15,4	R$ 253,6	R$ 261,2
4	R$ 269,00	R$ 7,8	R$ 261,2	R$ 0,00

Observamos que, se somarmos todos os valores amortizados, eles darão R$ 1.000,00, que é o valor do saldo devedor inicial.

A tabela SAC deste mesmo exemplo, é dada por:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	SD_0
1	$P_1 = J_1 + VA_1$	$J_1 = i \times SD_0$	$VA_1 = \frac{SD_0}{n}$	$SD_1 = SD_0 - VA_1$

2	$P_2 = J_2 + VA_2$	$J_2 = i \times SD_1$	$VA_2 = \frac{SD_0}{n}$	$SD_2 = SD_1 - VA_2$
3	$P_3 = J_3 + VA_3$	$J_3 = i \times SD_2$	$VA_3 = \frac{SD_0}{n}$	$SD_3 = SD_2 - VA_3$
4	$P_4 = J_4 + VA_4$	$J_4 = i \times SD_4$	$VA_4 = \frac{SD_0}{n}$	$SD_4 = SD_3 - VA_4$

Lembrando que SD_0 = 1.000,00, i = 3% a. m. e n = 4 meses.

No sistema de amortização constante, deve-se primeiro achar o valor amortizado:

$$VA = \frac{SD_0}{n}$$

$$VA = \frac{1.000,00}{4}$$

$$VA = R\$\ 250,00$$

Substituindo o valor da amortização na tabela SAC:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 1.000,00
1	$P_1 = J_1 + VA_1$	$J_1 = i \times SD_0$	R$ 250,00	$SD_1 = SD_0 - VA_1$
2	$P_2 = J_2 + VA_2$	$J_2 = i \times SD_1$	R$ 250,00	$SD_2 = SD_1 - VA_2$
3	$P_3 = J_3 + VA_3$	$J_3 = i \times SD_2$	R$ 250,00	$SD_3 = SD_2 - VA_3$
4	$P_4 = J_4 + VA_4$	$J_4 = i \times SD_4$	R$ 250,00	$SD_4 = SD_3 - VA_4$

Após o valor amortizado, deve-se determinar os saldos devedores dos respectivos períodos.

$$SD_1 = SD_0 - VA_1 \Rightarrow SD_1 = 1.000,00 - 250,00 = R\$\ 750,00$$

$$SD_2 = SD_1 - VA_2 => SD_2 = 750{,}00 - 250{,}00 = R\$\ 500{,}00$$

$$SD_3 = SD_2 - VA_3 => SD_3 = 500{,}00 - 250{,}00 = R\$\ 250{,}00$$

$$SD_4 = SD_3 - VA_4 => SD_4 = 250{,}00 - 250{,}00 = R\$\ 0{,}00$$

Substituindo os saldos devedores na tabela SAC, temos:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 1.000,00
1	$P_1 = J_1 + VA_1$	$J_1 = i \times SD_0$	R$ 250,00	R$ 750,00
2	$P_2 = J_2 + VA_2$	$J_2 = i \times SD_1$	R$ 250,00	R$ 500,00
3	$P_3 = J_3 + VA_3$	$J_3 = i \times SD_2$	R$ 250,00	R$ 250,00
4	$P_4 = J_4 + VA_4$	$J_4 = i \times SD_3$	R$ 250,00	R$ 0,00

Em seguida, deve-se determinar os valores dos juros dos respectivos períodos.

$$J_1 = i \times SD_0 => J_1 = 0{,}03 \times 1.000{,}00 = R\$\ 30{,}00$$

$$J_2 = i \times SD_1 => J_2 = 0{,}03 \times 750{,}00 = R\$\ 22{,}5$$

$$J_3 = i \times SD_2 => J_3 = 0{,}03 \times 500{,}00 = R\$\ 15{,}00$$

$$J_4 = i \times SD_3 => J_4 = 0{,}03 \times 250 = R\$\ 7{,}50$$

Substituindo os juros na tabela SAC, temos:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 1.000,00
1	$P_1 = J_1 + VA_1$	R$ 30,00	R$ 250,00	R$ 750,00
2	$P_2 = J_2 + VA_2$	R$ 22,50	R$ 250,00	R$ 500,00
3	$P_3 = J_3 + VA_3$	R$ 15,00	R$ 250,00	R$ 250,00
4	$P_4 = J_4 + VA_4$	R$ 7,50	R$ 250,00	R$ 0,00

Após o cálculo dos juros, deve-se determinar os valores das prestações dos períodos.

$$P_1 = J_1 + VA_1 => P_1 = 30,00 + 250,00 = R\$\ 280,00$$

$$P_2 = J_2 + VA_2 => P_2 = 22,50 + 250,00 = R\$\ 272,50$$

$$P_3 = J_3 + VA_3 => P_3 = 15,00 + 250,00 = R\$\ 265,00$$

$$P_4 = J_4 + VA_4 => P_4 = 7,50 + 250,00 = R\$\ 257,50$$

Logo, a tabela SAC completa é:

Período (mês)	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 1.000,00
1	R$ 280,00	R$ 30,00	R$ 250,00	R$ 750,00
2	R$ 272,50	R$ 22,50	R$ 250,00	R$ 500,00
3	R$ 265,00	R$ 15,00	R$ 250,00	R$ 250,00
4	R$ 257,50	R$ 7,50	R$ 250,00	R$ 0,00

Observamos que, se somarmos todos os valores amortizados, eles darão R$ 1.000,00, que é o valor do saldo devedor inicial.

6.1 Exercícios: Sistemas de amortização

1) Construa dois quadros de amortização: um para o Sistema Price e outro para o Sistema de Amortização Constante. Para uma dívida de R$ 50.000,00, com 5 prestações e uma taxa de juros de 10% ao período.

2) Uma dívida de R$ 500.000,00 foi contraída nas seguintes condições:

- Pagamentos em oito prestações anuais, iguais (sistema Price);
- Juros de 12% ao ano.

Após o pagamento da terceira prestação, o saldo devedor foi renegociado nos seguintes termos:

- O saldo devedor seria pago em 15 prestações (Price) anuais;
- Juros de 15% ao ano.

Calcule o valor da prestação da dívida renegociada.

3) Uma dívida de R$ 500.000,00 foi amortizada pelo SAC com juros de 5% ao semestre. Foram pagas pontualmente quatro das doze prestações semestrais e, então, a dívida foi renegociada pelo sistema Price em 10 prestações semestrais, com juro de 6% a. s. Qual o saldo devedor após o pagamento da quinta prestação pelo Sistema Price?

7

Estratégia de vendas: Os juros no seu dia a dia

Nesta seção, veremos, de maneira mais aprofundada, como os juros estão inseridos no nosso dia a dia. Já vimos que eles estão nas compras de bens (como celulares, TVs, computadores e móveis) e serviços (como empréstimos e títulos públicos).

Um dos casos clássicos é o uso dos juros como estratégia de venda. Uma grande empresa varejista anuncia em seu *site* a venda de um celular, da seguinte maneira:

*"Smartphone Samsung Galaxy A10 Vermelho 32 GB, Tela Infinita de 6.2", Câmera Traseira 13MP, Dual Chip, Android 9.0 e Processador Octa-Core. Por: R$ 699,00 em até **8 vezes de R$ 87,38 sem juros**. Ou **uma vez no Cartão ou Boleto de R$ 615,12** (12% de desconto)."*

- O valor de R$ 699,00 é o valor à vista?
- Não há realmente juros nesse anúncio?
- Por que a empresa fornece 12% de desconto, caso o cliente pague em 1 vez?

Podemos dizer que R$ 699,00 não é o valor à vista, mas sim os R$ 615,12. O valor dos juros pode ser obtido subtraindo de R$ 699,00 o valor R$ 615,12, logo seu valor totaliza R$ 83,88 em 8 vezes.

Mas, porque as empresas anunciam dessa maneira? As lojas fazem a propaganda desse jeito para oferecer "vantagens" aos seus clientes. Não é um bom *marketing*, fazer o anuncio desse produto dizendo:

"Smartphone Samsung Galaxy A10 Vermelho 32 GB, Tela Infinita de 6.2", Câmera Traseira 13MP, Dual Chip, Android 9.0 e Processador Octa-Core. Por: R$ 615,12 à vista. Mas caso você não tenha esse dinheiro, compre por R$ 699,00, em até 8 vezes de R$ 87,38."

Se você fosse comprar esse celular, qual forma de pagamento mais lhe agrada?

7.1 Exercícios: Estratégia de Vendas - Os juros no seu dia a dia

1) Indique os valores do preço à vista, dos juros e do financiamento destes anúncios:

a. "Notebook Positivo Motion I341TAI Intel Core i3 Tela 14" 4GB 1TB HD Linux – Cinza. Por: R$ 1.231,99, ou 8 vezes, sem juros, de R$ 174,99."

b. “Jogo de panelas tramontina antiaderente – de alumínio vermelho 10 peças Turim. Por: R$ 229,90 em 5 vezes de R$ 45,98 sem juros.”

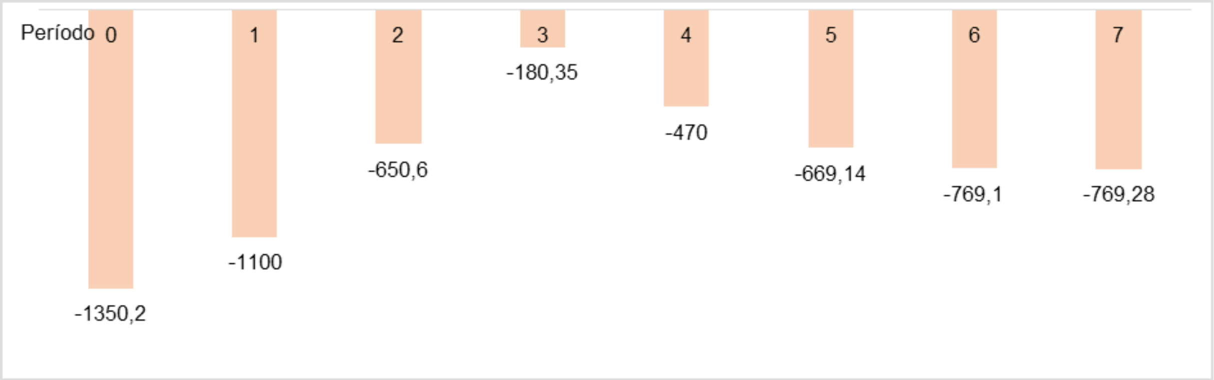
c. “Rack vamol led – imbuia/preto. Por: R$ 217,71, com desconto, ou até 12 vezes de R$ 18,14 sem juros. Nos pagamentos no boleto ou débito on-line saí por R$ 205,62.”

8

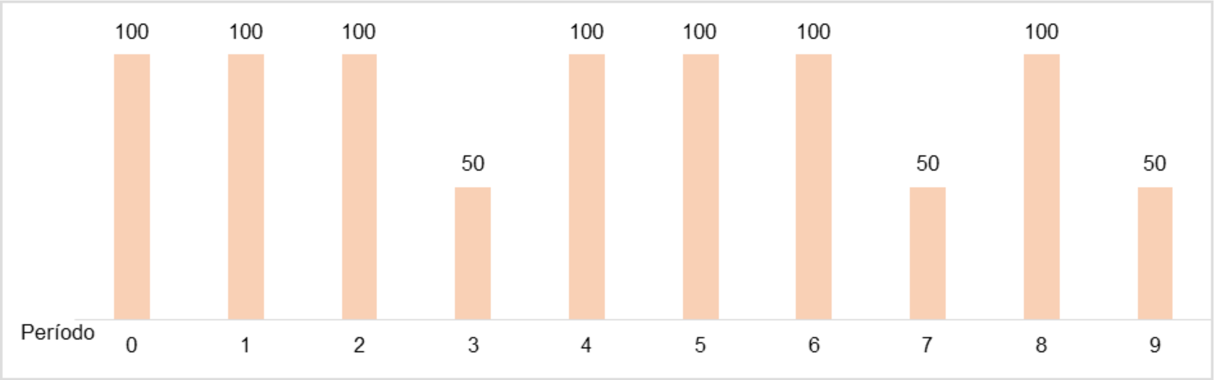
Respostas dos exercícios

1.1 Exercícios: fluxo de caixa

1)



2)



3) a. Uniforme b. Não uniforme

2.1.1 Exercícios: introdução

1) a. F b. F c. F d. V

2.2.1 Exercícios: juros simples

2) R$ 12.700,00 3) R$ 24.000,00 4) 40 meses 5) 34,61% a. a.

6) 22,22% a. m.   7) $ 140   8) R$ 1.250,00

2.3.1 Exercícios: juros compostos

2) R$ 13.022,60   3) R$ 26.667,01   4) aprox. 22 meses e meio.
5) 34,61% a. a.   6) 20,94% a. m.   7) R$ 105,26   8) R$ 1.250,00

2.4.1 Exercícios: Comparação entre juros simples e juros compostos

1)

Regime:	Juros simples	Juros compostos
Valor presente:	R$ 10.000,00	R$ 10.000,00
taxa de juros (a. m.):	0,50%	0,50%
Valor futuro (primeiro mês):	R$ 10.050,00	R$ 10.050,00
Valor futuro (segundo mês):	R$ 10.100,00	R$ 10.100,25
Valor futuro (terceiro mês):	R$ 10.150,00	R$ 10.150,75
Valor futuro (quarto mês):	R$ 10.200,00	R$ 10.201,51
Valor futuro (quinto mês):	R$ 10.250,00	R$ 10.252,51
Valor futuro (sexto mês):	R$ 10.300,00	R$ 10.303,78
Valor futuro (sétimo mês):	R$ 10.350,00	R$ 10.355,29
Valor futuro (oitavo mês):	R$ 10.400,00	R$ 10.407,07
Valor futuro (nono mês):	R$ 10.450,00	R$ 10.459,11
Valor futuro (décimo mês):	R$ 10.500,00	R$ 10.511,40
Valor futuro (décimo primeiro mês):	R$ 10.550,00	R$ 10.563,96
Valor futuro (décimo segundo mês):	R$ 10.600,00	R$ 10.616,78
Rendimento:	R$ 600,00	R 616,78

2) a. F   b. V   c. V   d. V

3.3 Exercícios: taxa de juros

1) a. Nominal   b. Nominal   c. Nominal   d. Nominal   e. Efetiva
2) 33,55% a. a.   3) 60,1% a. a.   4) 1,9% a. m.   5) 60,84% a. a.
6) 4,3% a. t.   7) 13,78% a. a.   8) 3,04 % a. s.   9) 0,02% a. d.

4.1 Exercícios: desconto comercial

1) R$ 617.600,00 2) R$ 3.840,00 3) R$ 9.895,83

5.1 Exercícios: Séries uniformes – pagamentos

1) a. F b. F c. F d. F e. V
2) R$ 618,89 3) R$ 495,11

6.1 Exercícios: Sistemas de amortização

1)

Tabela: Price

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 50.000,00
1	R$ 3.189,87	R$ 5.000,00	R$ 8.189,87	R$ 41.810,13
2	R$13.189,87	R$ 4.181,01	R$ 9.008,86	R$ 32.801,26
3	R$ 13.189,87	R$ 3.280,13	R$ 9.909,75	R$ 22.891,52
4	R$ 13.189,87	R$ 2.289,15	R$ 10.900,72	R$ 11.990,79
5	R$ 13.189,87	R$ 1.199,08	R$ 11.990,79	R$ 0,00

Tabela: SAC

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 50.000,00
1	R$ 15.000,00	R$ 5.000,00	R$ 10.000,00	R$ 40.000,00
2	R$ 14.000,00	R$ 4.000,00	R$ 10.000,00	R$ 30.000,00
3	R$ 13.000,00	R$ 3.000,00	R$ 10.000,00	R$ 20.000,00
4	R$ 12.000,00	R$ 2.000,00	R$ 10.000,00	R$ 10.000,00
5	R$ 11.000,00	R$ 1.000,00	R$ 10.000,00	R$ 0,00

2) R$ 62.050,00 3) R$ 190.775,00

7.1 Exercícios: Estratégia de Vendas - Os juros no seu dia a dia

1)

a. Valor à vista: R$ 1.231,99, juros: R$ 167,93 e financiamento: R$ 1.399,92.

b. Valor à vista: não é possível determinar, juros: não é possível determinar e financiamento: R$ 229,90.

c. Valor à vista: R$ 205,62, juros: R$ 12, 09 e financiamento: R$ 217,71

REFERÊNCIAS

BANCO CENTRAL DO BRASIL (Bacen). [Site institucional]. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/. Acesso em 26/10/2019.

CASAROTTO FILHO, Nelson; KOPITTKE, Bruno Hartmut. **Amortização de Dívidas**. *In:* ________. **Análise de Investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial.** São Paulo - SP: Atlas, 2017, 11º ed., p. 53 - 66.

CASAROTTO FILHO, Nelson; KOPITTKE, Bruno Hartmut. **Considerações sobre taxas de juros**. *In:* ________. **Análise de Investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial.** São Paulo - SP: Atlas, 2017, 11º ed., p. 33 - 38.

CASAROTTO FILHO, Nelson; KOPITTKE, Bruno Hartmut. **Juros: Conceito e Modalidades**. *In:* ________. **Análise de Investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial.** São Paulo - SP: Atlas, 2017, 11º ed., p. 3 - 10.

CASAROTTO FILHO, Nelson; KOPITTKE, Bruno Hartmut. **Relações de equivalência**. *In:* ________. **Análise de Investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial.** São Paulo - SP: Atlas, 2017, 11º ed., p. 11 - 32.

SAMANEZ, Carlos Patricio. **Juros simples**. *In:* ________. **Matemática Financeira.** São Paulo - SP: Pearson Prentice Hall, 2010, 5º ed., p. 12 - 13.

SAMANEZ, Carlos Patricio. **Operações de curto prazo**. *In:* ________. **Matemática Financeira.** São Paulo - SP: Pearson Prentice Hall, 2010, 5º ed., p. 69 - 71.

SAMANEZ, Carlos Patricio. **Séries periódicas uniformes**. *In:* ________. **Matemática Financeira.** São Paulo - SP: Pearson Prentice Hall, 2010, 5º ed., p. 91 - 104.

SAMANEZ, Carlos Patricio. **Taxa de juros**. *In:* ________. **Matemática Financeira.** São Paulo - SP: Pearson Prentice Hall, 2010, 5º ed., p. 46 - 56.

ROBERTO, Mário. Material de Matemática Financeira. s/d. Apresentação virtual. Disponível em: https://docplayer.com.br/amp/988380-Juro-e-montante-material-de-matematica-financeira-prof-mario-roberto-1.html. Acesso em: out. 2019.

ANEXO A
Equações: juros compostos

Como a taxa de juros composta de um período incide sobre o valor futuro do período anterior, podemos dizer que:

1. O VP do período 1 = VF do período 0.
2. O VP do período 2 = VF do período 1.
3. O VP do período 3 = VF do período 2.

n. O VP do período n = VF do período n-1

Partindo da equação de juros simples, temos que o valor futuro do período 0, isto é, n = 0, será dado por:

$$VF_0 = VP \times (1 + i \times 0)$$

$$VF_0 = VP \times (1 + 0)$$

$$VF_0 = VP \times 1$$

$$VF_0 = VP$$

Como no valor futuro do período 1 (VF_1) a taxa de juros incide sobre o VF_0 (sendo: VF_0 = VP) , e do 0 para 1 passou um período (n = 1), dizemos que VF_1 é igual à:

$$VF_1 = VF_0 \times (1 + i \times 1)$$

$$VF_1 = VF_0 \times (1 + i)$$

$$VF_1 = VP \times (1 + i)$$

O valor futuro do período 2 é dado por:

$$VF_2 = VF_1 \times (1 + i \times n)$$

Do período 1 para o período 2, passou somente um período. Substituindo n por 1 temos:

$$VF_2 = VF_1 \times (1 + i \times 1)$$

$$VF_2 = VF_1 \times (1 + i)$$

Substituindo VF_1 por VP x (1 + i), temos que VF_2 é igual à:

$$VF_2 = VP \times (1 + i) \times (1 + i)$$

O valor futuro do período 3 é dado por:

$$VF_3 = VF_2 \times (1 + i \times n)$$

Do n = 2 para o n = 3 passou somente um período, logo n = 1, substituindo temos:

$$VF_3 = VF_2 \times (1 + i \times 1)$$

$$VF_3 = VF_2 \times (1 + i)$$

Substituindo VF_2 por VP x (1 + i) x (1 + i), temos:

$$VF_3 = VP \times (1 + i) \times (1 + i) \times (1 + i)$$

Por meio dessa demonstração, notamos que há uma multiplicação entre o VP e 1 + i. A quantidade dos termos de 1 + i é igual ao período para o qual estamos calculamos o VF.

Realizando algumas manipulações matemáticas, dizemos que o valor futuro no enésimo período é dado por:

$$\mathbf{VF} = \mathbf{VP} \times (\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$$

O valor presente em juros compostos pode ser dado ao passar a expressão $(1 + i)^n$ dividindo o valor futuro:

$$\mathbf{VP} = \frac{\mathbf{VF}}{(\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}}$$

Realizando algumas manipulações algébricas para encontrar a equação de juros compostos:

$$\frac{VF}{VP} = (1 + i)^n$$

O número 1 elevado a qualquer outro número é igual a 1.Portanto:

$$\frac{VF}{VP} = 1 + i^n$$

$$i^n = \frac{VF}{VP} - 1$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{VF}{VP} - 1}$$

A raiz enésima do 1 é igual a ele mesmo. Logo:

$$\mathbf{i} = \sqrt[\mathbf{n}]{\left(\frac{\mathbf{VF}}{\mathbf{VP}}\right)} - \mathbf{1}$$

Isolando o n, encontramos, a fórmula matemática de achar o número de períodos:

$$VF = VP \times (1 + i)^n$$

$$\frac{VF}{VP} = (1 + i)^n$$

Aplicando a função logarítmica em ambos os lados, temos:

$$\log\left(\frac{VF}{VP}\right) = \log\ (\ 1 + i)^n$$

Por propriedades da função logarítmica, temos:

$$\log\left(\frac{VF}{VP}\right) = n \log(1 + i)$$

Isolando o n:

$$\mathbf{n = \frac{\log\left(\frac{VF}{VP}\right)}{\log(1 + i)}}$$

ANEXO B
Equação: conversão da taxa nominal para efetiva

Partindo da definição que duas taxas são equivalentes quando resultam no mesmo valor futuro, igualamos os valores futuros dado pelas taxas nominal e efetiva em determinado período.

- **Observações**:

Taxa nominal = r
Taxa efetiva = i
Período = n

Como estamos buscando a taxa efetiva de r (taxa nominal) o período (n) para i (taxa efetiva) será, sempre, igual a 1.

$$\mathbf{VF} = \mathbf{VP} \times (\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$$

$$\mathrm{VF}_{\text{taxa nominal}} = \mathrm{VF}_{\text{taxa efetiva}}$$

$$\mathrm{VP} \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n} = \mathrm{VP} \times (1 + i)^{n}$$

Dividimos a taxa nominal pelo número de períodos, pois estamos buscando a taxa equivalente.

Como em ambos lados da igualdade, há o valor presente, podemos cortá-lo:

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n} = (1 + i)^{n}$$

Como já dito, o período (n) para a taxa efetiva será sempre igual a 1. Portanto:

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n} = (1 + i)^{1}$$

Qualquer valor elevado a 1 é igual a ele mesmo. Logo:

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}=1+i$$

Isolando i (taxa efetiva), temos:

$$\mathbf{i}=\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}-\mathbf{1}$$

ANEXO C
Equações: conversão entre taxas efetivas

Duas taxas efetivas são equivalentes quando com o mesmo valor presente resultam no mesmo valor futuro, em períodos diferentes.

Para achar a taxa de um período maior, dada uma taxa do período menor, deve-se primeiro igualar os valores futuros:

$$VF_{maior} = VF_{menor}$$

$$VP \times (1 + i_{maior})^{n_{maior}} = VP \times (1 + i_{menor})^{n_{menor}}$$

Como os valores presentes, tanto para uma taxa como para outra, são iguais, logo:

$$(1 + i_{maior})^{n_{maior}} = (1 + i_{menor})^{n_{menor}}$$

Como queremos a taxa do período maior (i_{maior}), temos que o período dessa taxa será igual a 1 ($n_{maior} = 1$). Reescrevendo a equação:

$$(1 + i_{maior})^{1} = (1 + i_{menor})^{n_{menor}}$$

Como qualquer valor elevado a 1 é igual a ele mesmo, temos:

$$1 + i_{maior} = (1 + i_{menor})^{n_{menor}}$$

Logo, i_{maior} é dado por:

$$\mathbf{i_{maior} = (1 + i_{menor})^{n_{menor}} - 1}$$

Podemos encontrar a equação que determina a equivalência de uma taxa efetiva do período maior para a taxa efetiva do período menor, manipulando, algebricamente, a fórmula que determina a equivalência da taxa do período menor para o período maior.

$$i_{maior} = (1 + i_{menor})^{n_{menor}} - 1$$

$$i_{maior} + 1 = (1 + i_{menor})^{n_{menor}}$$

Passando a raiz $\sqrt[n_{menor}]{\ }$ em ambos os lados, temos:

$$\sqrt[n_{menor}]{(i_{maior} + 1)} = \sqrt[n_{menor}]{(1 + i_{menor})^{n_{menor}}}$$

Podemos reescrever a expressão acima, por propriedades matemáticas, como:

$$(i_{maior} + 1)^{\frac{1}{n_{menor}}} = 1 + i_{menor}$$

Isolando a taxa de juros efetiva do período menor, i_{menor}, temos:

$$\mathbf{i_{menor} = (i_{maior} + 1)^{\frac{1}{n_{menor}}} - 1}$$

Coordenadoria de
Educação Aberta e a Distância